Комплекс учебников удостоен
Премии Правительства Российской Федерации
в области науки и техники за 2003 год

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Выпуск 4

Комплекс учебников
«Математика в техническом университете»
из 21 выпуска

1. Введение в анализ
2. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
3. Аналитическая геометрия
4. Линейная алгебра
5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
6. Интегральное исчисление функций одного переменного
7. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
8. Дифференциальные уравнения
9. Ряды
10. Теория функций комплексного переменного
11. Интегральные преобразования и операционное исчисление
12. Дифференциальные уравнения математической физики
13. Приближенные методы математической физики
14. Методы оптимизации
15. Вариационное исчисление и оптимальное управление
16. Теория вероятностей
17. Математическая статистика
18. Случайные процессы
19. Дискретная математика
20. Исследование операций
21. Математическое моделирование в технике

А.Н. КАНАТНИКОВ, А.П. КРИЩЕНКО

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений

5-е издание

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2015

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.151.5
К19

Рецензенты:
профессор В.И. Елкин, профессор Е.В. Шикин

Канатников, А. Н.
К19 Линейная алгебра : учебник для вузов / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 5-е изд. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 335, [1] с. : ил. – (Математика в техническом университете ; вып. 4).

ISBN 978-5-7038-3845-7
ISBN 978-5-7038-4284-3 (вып. 4)

Книга является четвертым выпуском комплекса учебников «Математика в техническом университете» и содержит изложение базового курса по линейной алгебре. Дополнительно включены основные понятия тензорной алгебры и итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Материал изложен в объеме, необходимом для подготовки студента технического университета.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который автор читает в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.151.5

ISBN 978-5-7038-4284-3 (вып. 4)
ISBN 978-5-7038-3845-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Четвертый выпуск серии „Математика в техническом университете“ содержит материал по курсу линейной алгебры, обычно читаемой во втором или третьем семестре.

Книга, как и другие выпуски серии, имеет развитый аппарат для поиска информации, позволяющий использовать книгу как справочник. Любое ключевое понятие в месте определения выделено ***полужирным курсивом.*** Первое упоминание ключевого понятия в параграфе дано *светлым курсивом.* Для удобства цитирования определения, теоремы, замечания, формулы и т.п. снабжены двойной нумерацией. Например, теорема 2.1 — это первая теорема в главе 2, (2.1) — первая формула в главе 2, рис. 1.5 — пятый рисунок в главе 1.

В тексте книги используются ссылки, облегчающие поиск нужных определений и других сведений. Такие ссылки указывают номер главы или параграфа и могут относиться как к данной книге, так и к другим выпускам серии. Например, (см. **1.2**) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы этой книги, тогда как [I-7.5] означает ссылку на пятый параграф седьмой главы в первом выпуске*.

Все ключевые понятия приведены в предметном указателе, помещенном в конце книги. Они следуют в алфавитном порядке по существительному в именительном падеже. Ссылки предметного указателя разделяются на основные (даны шрифтом прямого начертания) и неосновные (даны курсивным шрифтом). Основная ссылка указывает, где введено понятие, нео-

---

*Детальные ссылки с указанием параграфа даются только на первый выпуск серии и относятся к изданию: *Морозова В.Д.* Введение в анализ: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996. В остальных случаях (выпуски [II] и [III]) приводится лишь номер выпуска, а нужное место в книге можно найти при помощи предметного указателя.

сновная ссылка указывает место в книге или другом выпуске серии, где имеются дополнительные сведения о ключевом понятии. Ссылки на термины, введенные в других выпусках серии, содержат номера этих выпусков. Например, ссылка I-215 означает страницу 215 первого выпуска, а ссылка II — второй выпуск (соответствующее место в этом выпуске можно найти по его предметному указателю).

Большинство используемых обозначений помещены в перечне основных обозначений. Для каждого обозначения наряду с краткой расшифровкой указаны разделы этого или других выпусков серии, в которых оно было введено. В книге приведены написание и русское произношение букв латинского и греческого алфавитов.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить некоторый набор заданий. В тексте этих заданий **прямым полужирным шрифтом** выделены ключевые термины, значение которых должно быть известно читателю, а в конце каждого задания указана ссылка на номер выпуска серии, в котором можно найти соответствующие разъяснения.

Задания для самопроверки

1. Что понимают под **критерием** некоторого утверждения? [I]

2. Из каких этапов состоит доказательство по **методу математической индукции**? [I]

3. Сформулируйте определение **взаимно однозначного отображения** двух **множеств**. Чему равна **композиция прямого и обратного отображений** двух множеств? [I]

4. Является ли **множество** $\mathbb{R}$ **действительных чисел (множество** $\mathbb{C}$ **комплексных чисел) упорядоченным** и образуют ли **натуральные числа** его **конечное** или **бесконечное подмножество**? Что такое **абсолютная величина (модуль)** числа? [I]

5. Имеют ли операции сложения и умножения действительных чисел свойства **коммутативности**, **ассоциативности** и в чем состоит их свойство **дистрибутивности**? [I]

6. Для **комплексного числа** $z = 2 - 3i$ найти **действительную и мнимую части**, **модуль** и его произведение с **комплексно сопряженным числом**. [I]

7. Какие свойства имеют **функции**: а) **непрерывные на отрезке**; б) **непрерывно дифференцируемые в интервале**? Привести пример **монотонных в интервале функций**, сумма которых не является монотонной в этом интервале. [I], [II]

8. Как можно выяснить, имеет ли **многочлен одного переменного кратные корни**? [I]

9. Всегда ли **производная многочлена одного переменного степени** n является многочленом степени $n-1$? [I], [II]

10. Как в множествах векторов V_2 на плоскости и V_3 в пространстве вводятся операции их **сложения** и **умножения на действительные числа**? Что такое **длина** (**модуль**) **вектора** и **угол между векторами**? [III]

11. Какие свойства имеет **скалярное умножение** векторов из V_3? Чему равно скалярное произведение двух векторов из V_2, если: а) они образуют **ортонормированный базис** в V_2; б) они **коллинеарны**? [III]

12. Когда тройка векторов из V_3, состоящая из двух векторов и их **векторного произведения** а) является **компланарной**; б) образует **правый ортонормированный базис** в V_3? [III]

13. Доказать, что произведение двух **кососимметрических матриц** является **симметрической матрицей** тогда и только тогда, когда перемножаемые матрицы **перестановочны**. [III]

14. Может ли **ранг квадратной невырожденной матрицы** быть меньше количества ее **базисных строк** (**столбцов**)? [III]

15. Что утверждает **теорема о базисном миноре**? [III]

16. Привести пример **верхней (нижней) треугольной матрицы**, у которой максимальное число **линейно независимых строк** не равно максимальному числу ее **линейно зависимых столбцов**. [III]

17. Приведите пример **вырожденной матрицы** третьего **порядка**, которая не является произведением **матрицы-столбца** на **матрицу-строку**. [III]

18. Как перейти от **матричной записи системы линейных алгебраических уравнений** (**СЛАУ**) к ее **векторной** и **координатной** записям и наоборот? Как **неизвестные** СЛАУ разбивают на **зависимые** (**базисные**) и **независимые** (**свободные**)? [III]

19. Какие свойства имеют **решения СЛАУ** и решения **соответствующей** ей **однородной СЛАУ**? Что утверждает **теорема Кронекера — Капелли** о **совместности** и **несовместности СЛАУ** и связана ли ее формулировка с **матрицей СЛАУ**? [III]

20. Что можно утверждать об **определителе матрицы** а) **обратной** к **транспонированной**; б) обратной к **противоположной**? [III]

21. Какой **тип** имеют **нулевая** и **единичная матрицы**, если для них определены операции **сложения** и **умножения**? [III]

22. Доказать, что определитель **диагональной матрицы** равен произведению ее **диагональных элементов**. [III]

23. Какие размеры имеют **блоки блочно-диагональной матрицы**? [III]

24. Перечислите виды **кривых второго порядка**. Укажите их **канонические уравнения**. [III]

25. Перечислите основные виды **поверхностей второго порядка** и укажите их **канонические уравнения**. [III]

26. Что такое **абсолютная** и **относительная погрешности**? [II]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶ — начало и окончание доказательства

\# — окончание примера, замечания

$a \in A$, $A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) **I-1.1**

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел **I-1.3**

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел **I-1.3**

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел **Д.1.1, I-4.3**

$|x|$ — абсолютная величина числа x **I-1.3**

$\mathbb{R}^n$ — линейное арифметическое пространство **1.1**

$\boldsymbol{a}$, a — вектор (элемент линейного пространства) и столбец его координат **1.6**

$|\boldsymbol{a}|$ — длина вектора $\boldsymbol{a}$ **3.3, III**

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор **1.1, III**

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ — сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **1.1, III**

$\lambda\boldsymbol{a}$ — произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ **1.1, III**

$\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **3.4, III**

$\dim\mathcal{L}$ — размерность линейного пространства $\mathcal{L}$ **1.7**

$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}\}$ — линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}$ **2.1**

$\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ $(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)$ — сумма (прямая сумма) линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ **2.3**

$\mathcal{H}^\perp$ — ортогональное дополнение к линейному подпространству $\mathcal{H}$ **3.9**

V_1 $(V_2$ и $V_3)$ — пространство коллинеарных векторов (компланарных векторов и всех свободных векторов) **III**

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **3.1, III**

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **III**

$\boldsymbol{abc}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ **III**

$\boldsymbol{a} = \{x; y\}$ ($\boldsymbol{a} = \{x; y; z\}$) — задание вектора $\boldsymbol{a}$ из V_2 (V_3) с помощью его координат в фиксированном базисе в V_2 (V_3) **III**

$\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) — ортонормированный базис в V_1 (правый ортонормированный базис в V_2 и в V_3) **III**

Oxy, $O\boldsymbol{ij}$ (Oxyz, $O\boldsymbol{ijk}$) — правая прямоугольная система координат на плоскости (в пространстве) **III**

$M(x; y; z)$ ($M(x; y)$) — точка M пространства (плоскости) с координатами x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата) **III**

$K_n[x]$ — множество многочленов переменного x степени, не превышающей n **1.1**

A^{T} — матрица, транспонированная к матрице A **III**

$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $a_1, \ldots, a_n$ **III**

$\det A$ — определитель матрицы A **III**

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A **III**

$\operatorname{Rg} A$ — ранг матрицы A **III**

A^{+} — псевдообратная матрица **Д.3.3**

Θ — нулевая матрица **III**

$\boldsymbol{A}$, A — линейный оператор и его матрица **4.3**

$\boldsymbol{\Theta}$ — нулевой оператор **4.1**

$\ker \boldsymbol{A}$, $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ — ядро и образ линейного оператора $\boldsymbol{A}$ **4.1**

$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ — произведение тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ **10.4**

$\varphi(x, \cdot)$ — функция многих переменных, рассматриваемая при фиксированном значении аргумента x (в общем случае векторного) как функция второго аргумента **10.2**

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ **I-2.6**

$k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества $\mathbb{N}$ от 1 до n включительно **I-2.6**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K $\varkappa$	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
H η	эта	O o	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

ВВЕДЕНИЕ

Два раздела из курса аналитической геометрии [Ш] имеют много общего. На множестве векторов в пространстве (V_3) или на плоскости (V_2) определены линейные операции сложения векторов и умножения вектора на число. Одноименные операции введены и во множестве $M_{mn}(\mathbb{R})$ матриц одного типа $m\times n$. В обоих случаях операции обладали схожими свойствами. Аналогия между векторами и матрицами была подчеркнута стилем изложения: линейные свойства матриц описаны в том же ключе, что и линейные свойства векторов.

Естественно задаться целью построить такую математическую теорию, которая охватывала бы и векторную алгебру, и матричную как частные случаи. Такая теория была создана и получила название линейной алгебры. Она базируется на аксиоматическом методе. Согласно этому методу вводятся первичные, неопределяемые понятия, которые должны подчиняться некоторому набору аксиом. Аксиомы — это первичные утверждения, которые не доказываются, а считаются верными изначально. Все остальные утверждения теории, базирующейся на аксиоматическом методе, выводятся из заданных аксиом.

Примером использования аксиоматического метода является геометрия, известная из школьного курса математики. Ее первичными понятиями являются точки, прямые и плоскости. В качестве аксиом используются, например, утверждения: через две несовпадающие точки проходит прямая, и притом только одна; через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну; если две точки прямой лежат в данной плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Основным объектом линейной алгебры является ***линейное пространство*** — понятие, обобщающее множество V_3 векторов в пространстве и множество $M_{mn}(\mathbb{R})$ матриц одного типа с линейными операциями, заданными на этих множествах. Элементы линейного пространства называют *векторами*, обобщая термин из векторной алгебры. Само линейное пространство часто называют ***векторным***. Линейные пространства — один из самых распространенных математических объектов, и применение линейной алгебры далеко не исчерпывается векторной и матричной алгебрами.

В линейном пространстве действуют две операции: сложение векторов и умножение вектора на число, которые подчиняются аксиомам линейного пространства. Однако могут вводиться и другие операции и соответственно дополнительные аксиомы, например операция, аналогичная скалярному умножению векторов. Эти операции задают дополнительные отношения в линейном пространстве, которые тоже изучаются в линейной алгебре и часто используются в различных ее приложениях.

Аксиоматический метод, положенный в основу линейной алгебры, приводит к тому, что теория становится менее наглядной и более сложной для восприятия. Доказательства теорем проводятся более строго, но и более формально. И хотя формулировки теорем чаще всего мотивируются аналогиями из конкретных приложений линейной алгебры (в частности, все теми же векторной и матричной алгебрами), доказательства не всегда можно представить образно, как в планиметрии или стереометрии.

Трудности линейной алгебры в освоении окупаются тем, что удается уловить связи между весьма отдаленными разделами математики, между которыми на первый взгляд не может быть ничего общего.

В учебник включены как традиционные вопросы, посвященные понятию линейного пространства, линейного подпространства, линейного оператора, так и вопросы для углубленного изучения. Последние оформлены в виде дополнений. Кроме того, в стандартный курс не входит глава 10, посвященная элементам тензорной алгебры.

Для изучения материала учебника требуется знание математики в рамках первого семестра технического университета. Соответствующую информацию можно почерпнуть в предыдущих выпусках [II], [III] серии „Математика в техническом университете“.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Определение линейного пространства

Центральное место в линейной алгебре занимает следующее понятие.

Определение 1.1. Множество $\mathcal{L}$ элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... любой природы называют ***линейным пространством***, если выполнены три условия:

1) задано ***сложение элементов*** $\mathcal{L}$, т.е. закон, по которому любым элементам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***суммой элементов*** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;

2) задано ***умножение элемента на число***, т.е. закон, по которому любому элементу $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***произведением элемента*** $\boldsymbol{x}$ ***на*** (действительное) ***число*** и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x}$;

3) указанные законы (***линейные операции***) подчиняются следующим ***аксиомам линейного пространства***:

а) сложение коммутативно: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;

б) сложение ассоциативно: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$;

в) существует такой элемент $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$;

г) для каждого элемента $\boldsymbol{x}$ множества $\mathcal{L}$ существует такой элемент $(-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

д) произведение любого элемента $\boldsymbol{x}$ из $\mathcal{L}$ на единицу равно этому элементу: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

е) умножение на число ассоциативно: $\lambda(\mu \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

ж) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по числам: $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x}$;

з) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по элементам: $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.

Элементы линейного пространства принято называть ***векторами.*** Элемент $\mathbf{0}$, существование которого постулируется аксиомой в), называют ***нулевым вектором***, а элемент $(-\boldsymbol{x})$ — вектором, ***противоположным*** к вектору $\boldsymbol{x}$.

В понятии „линейное пространство“ важно не только рассматриваемое множество $\mathcal{L}$, но и заданные операции сложения элементов и умножения на число. Одно и то же множество $\mathcal{L}$ при одних операциях может быть линейным пространством, а при других — нет. Фактически линейным пространством является совокупность $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ из множества элементов и двух операций, которая удовлетворяет условиям определения 1.1. В этой тройке объектов базовым все-таки является множество $\mathcal{L}$, так как операции вводятся именно на этом множестве. Поэтому понятие линейного пространства обычно ассоциируют с множеством элементов $\mathcal{L}$ и говорят, что $\mathcal{L}$ — линейное пространство. При этом, как правило, очевидно, что понимается под операциями линейного пространства. Если же требуется явно указать используемые операции, то говорят: множество $\mathcal{L}$ — линейное пространство относительно таких-то операций.

Согласно определению 1.1 линейного пространства $\mathcal{L}$ сумма определена для любых элементов из $\mathcal{L}$ и всегда является элементом множества $\mathcal{L}$. Подчеркивая последнее, говорят, что ***множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операции*** сложения. Аналогично, согласно тому же определению, множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операции умножения его элементов на действительные числа.

Пример 1.1. Приведем примеры линейных пространств:

– множество V_3 (V_2) всех *свободных векторов* в пространстве (на плоскости) с линейными операциями над векторами — линейное пространство, так как верны все аксиомы линейного пространства [III];

– множество всех *геометрических векторов* в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости (рис. 1.1) с линейными операциями над векторами является линейным пространством [III];

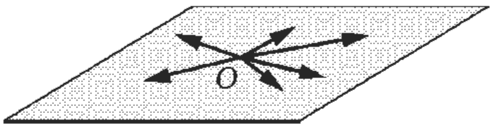


Рис. 1.1

– множество $M_{mn}(\mathbb{R})$ матриц типа $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами также удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства;

– множество матриц-строк (матриц-столбцов) длины n является линейным пространством относительно матричных операций сложения и умножения на число (это частный случай предыдущего примера);

– множество $K_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n, которые как функции можно складывать и умножать на действительные числа;

– множество всех решений данной однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций [III]. Столбец, получаемый в результате сложения решений или умножения решения на число, снова будет решением системы. Поэтому определены операции, о которых говорится в определении 1.1, подчиняющиеся аксиомам линейного пространства;

– множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При сложении непрерывных функций получаем непрерывную функцию, при умножении непрерывной функции на число также получаем непрерывную функцию. Поэтому сложение функций и умножение функции на число, не выводящие за пределы множества непрерывных на отрезке функций, можно рассматривать как операции линейного пространства. Легко убедиться, что для этих операций верны все аксиомы линейного пространства.

Пример 1.2. Рассмотрим множество $\mathbb{R}_+$ всех действительных положительных чисел. Если суммой элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+$ считать обычную сумму действительных чисел $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, а произведением действительного числа λ на элемент $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ — обычную операцию произведения действительных чисел $\lambda\boldsymbol{x}$, то мы не получим линейного пространства, так как при $\lambda = 0$ обычная операция умножения действительных чисел дает $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = 0$, т.е. умножение на нуль дает число, не принадлежащее множеству $\mathbb{R}_+$, а значит, множество $\mathbb{R}_+$ не замкнуто относительно этой операции умножения на действительные числа, т.е. нарушается условие 2) определения 1.1.

Введем операции на множестве $\mathbb{R}_+$ по-другому. „Суммой“ $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$ элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ назовем произведение этих элементов как действительных чисел: $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$. „Произведением“ $\lambda \odot \boldsymbol{x}$ элемента $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ назовем возведение $\boldsymbol{x}$ как числа в действительную степень λ: $\lambda \odot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\lambda}$. Видоизмененное обозначение введенных операций $\oplus$ и $\odot$ подчеркивает их необычную трактовку.

„Сумма“ $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$ и „произведение“ $\lambda \odot \boldsymbol{x}$, как нетрудно увидеть, определены для любых пар $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ соответственно. Кроме того, множество $\mathbb{R}_+$ замкнуто относительно этих операций. Убедимся, что для этих операций верны аксиомы линейного пространства. Для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_+$ и любых действительных чисел λ, μ, учитывая свойства умножения и возведения в степень действительных чисел, получаем:

а) $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x}$;

б) $(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) \oplus \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \oplus (\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z})$;

в) в качестве нулевого элемента $\mathbf{0}$ следует взять число 1, так как $\boldsymbol{x} \oplus \mathbf{0} = \boldsymbol{x} \cdot 1 = \boldsymbol{x}$ для любого элемента $\boldsymbol{x}$;

г) противоположным произвольному элементу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ будет элемент $(\ominus\boldsymbol{x}) = 1/\boldsymbol{x}$, так как $\boldsymbol{x} \oplus (\ominus\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(1/\boldsymbol{x}) = 1 = \mathbf{0}$;

д) „умножение“ элемента на число 1 его не меняет: $1 \odot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}$;

е) $\lambda \odot (\mu \odot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^{\mu})^{\lambda} = \boldsymbol{x}^{\mu\lambda} = \boldsymbol{x}^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot \boldsymbol{x}$;

ж) $(\lambda + \mu) \odot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\lambda+\mu} = \boldsymbol{x}^{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mu} = (\lambda \odot \boldsymbol{x}) \oplus (\mu \odot \boldsymbol{x})$;

з) $\lambda \odot (\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^{\lambda} = \boldsymbol{x}^{\lambda}\boldsymbol{y}^{\lambda} = (\lambda \odot \boldsymbol{x}) \oplus (\lambda \odot \boldsymbol{y})$.

Итак, заключаем, что все восемь аксиом линейного пространства выполнены. Значит, множество $\mathbb{R}_+$ с введенными операциями $\oplus$ и $\odot$ является линейным пространством.

Пример 1.3. На множестве $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$, элементами которого являются упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел, введем операции

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда получим линейное пространство, так как все аксиомы линейного пространства для данных операций выполняются. Это линейное пространство, по сути, есть линейное пространство матриц-строк. Отличие лишь формальное, так как первое определено как множество упорядоченных наборов чисел, а второе как множество матриц. Но элементы матрицы всегда записывают в определенном порядке. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ называют ***линейным арифметическим пространством.***

Замечание 1.1. Операция умножения вектора на число в определении 1.1 задана только для действительных чисел. Но точно так же можно ввести линейное пространство с умножением элементов множества $\mathcal{L}$ на произвольные комплексные числа. Два способа определения линейного пространства различают, используя термины „линейное пространство над полем* действительных чисел" (более коротко: ***действительное линейное пространство***) и „линейное пространство над полем комплексных чисел" (***комплексное линейное пространство***). Теории в этих двух случаях очень близки, но

*По поводу термина „поле" см. Д.1.1

различия все-таки есть. Важный пример комплексного линейного пространства — комплексное арифметическое пространство

$$\mathbb{C}^n = \{\boldsymbol{z}\colon \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)\},$$

элементами которого являются упорядоченные наборы из n комплексных чисел. Операции в этом пространстве задаются по тем же правилам, что и в случае действительного арифметического пространства.

1.2. Свойства линейного пространства

Непосредственно из *аксиом линейного пространства* можно получить ряд простейших свойств.

Свойство 1.1. Любое линейное пространство имеет только один *нулевой вектор*.

◀ В аксиоме в) линейного пространства не утверждается, что нулевой вектор должен быть единственным. Но из аксиом а) и в) в совокупности это вытекает. Пусть существуют два нулевых вектора $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$. Тогда

$$\mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \boxed{\text{аксиома а)}} = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = \mathbf{0}'.$$

Здесь в роли нулевого элемента сначала выступает вектор $\mathbf{0}'$, а затем $\mathbf{0}$. Видим, что векторы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ совпадают. ▶

Свойство 1.2. Каждый вектор линейного пространства имеет только один *противоположный вектор*.

◀ Пусть для вектора $\boldsymbol{x}$ существуют два противоположных вектора $(-\boldsymbol{x})$ и $(-\boldsymbol{x})'$. Согласно аксиоме г) линейного пространства это означает, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})' = \mathbf{0}$. Рассмотрим двойную *сумму* $(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})'$ *элементов* линейного пространства. Согласно аксиоме б) эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем:

$$(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})'=(-\boldsymbol{x})+\big(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})'\big)=(-\boldsymbol{x})+\mathbf{0}=$$
$$=\boxed{\text{аксиома в)}}=(-\boldsymbol{x}),$$

$$(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})'=\big((-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}\big)+(-\boldsymbol{x})'=$$
$$=\boxed{\text{аксиома а)}}=\big(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})\big)+(-\boldsymbol{x})'=\mathbf{0}+(-\boldsymbol{x})'=$$
$$=\boxed{\text{аксиома а)}}=(-\boldsymbol{x})'+\mathbf{0}=\boxed{\text{аксиома в)}}=(-\boldsymbol{x})'. \quad \blacktriangleright$$

Свойство 1.3. Если вектор $(-\boldsymbol{x})$ противоположен вектору $\boldsymbol{x}$, то вектор $\boldsymbol{x}$ противоположен вектору $(-\boldsymbol{x})$.

◀ Утверждение опирается на коммутативность сложения. Действительно,

$$\text{„}(-\boldsymbol{x})\text{ противоположен }\boldsymbol{x}\text{“} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0},$$
$$\text{„}\boldsymbol{x}\text{ противоположен }(-\boldsymbol{x})\text{“} \quad\Longleftrightarrow\quad (-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

Справа стоят эквивалентные равенства (в силу аксиомы а)). Значит, и утверждения слева равносильны. ▶

Свойство 1.4. Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ уравнение $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ относительно $\boldsymbol{x}$ имеет решение, и притом единственное.

◀ С у щ е с т в о в а н и е. Решением уравнения $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ является вектор $(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$, так как

$$\boldsymbol{a}+\big((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\big)=\big(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})\big)+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

Е д и н с т в е н н о с т ь. Пусть $\boldsymbol{x}$ — какое-либо решение указанного уравнения, т.е. выполнено равенство $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\boldsymbol{a})$, получим $(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$, откуда $\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$. Видим, что вектор $\boldsymbol{x}$ совпал с указанным выше решением $(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$. Значит, других решений нет. ▶

Последнее свойство позволяет ввести еще одну операцию в линейном пространстве, которая является противоположной *сложению*. ***Разностью*** двух ***векторов*** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ называют вектор $\boldsymbol{x}$, являющийся решением уравнения $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ (вспомним, что разностью двух чисел $b-a$ называют такое число, которое в сумме с вычитаемым a дает уменьшаемое b). Из доказательства свойства 1.4 вытекает, что

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}.$$

Свойство 1.5. *Произведение* произвольного *элемента* линейного пространства *на число* 0 равно нулевому вектору: $0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

◀ Отметим, что решением уравнения $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ относительно неизвестного $\boldsymbol{y}$ является нулевой вектор (аксиома в)). Покажем, что в качестве решения этого уравнения можно взять и вектор $0\cdot\boldsymbol{x}$, который тогда, в силу единственности решения, будет совпадать с $\boldsymbol{0}$. Итак, проверяем:

$$\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{x}=\boxed{\text{аксиома ж)}}=$$
$$=(1+0)\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}=\boxed{\text{аксиома д)}}=\boldsymbol{x}. \qquad ▶$$

Свойство 1.6. Вектор, противоположный данному вектору $\boldsymbol{x}$, равен произведению $\boldsymbol{x}$ на число -1: $(-\boldsymbol{x})=(-1)\boldsymbol{x}$.

◀ Благодаря единственности противоположного вектора (свойство 1.2) достаточно доказать, что вектор $(-1)\boldsymbol{x}$ удовлетворяет аксиоме г) линейного пространства. Для этого используем аксиому дистрибутивности ж) и только что доказанное свойство 1.5:

$$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=\bigl(1+(-1)\bigr)\boldsymbol{x}=0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \qquad ▶$$

Замечание 1.2. Эквивалентность равенств $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ можно трактовать как правило, согласно которому слагаемое, которое переносят в другую часть равенства, меняет свой знак. Ясно также, что для $\alpha \in \mathbb{R}$ из равенства $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ следует равенство $\alpha\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ и наоборот (при $\alpha \neq 0$), так как

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{a}) = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

и аналогично

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}.$$

Свойство 1.7. Произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор: $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

◄ Мы теперь знаем, что нулевой вектор можно представить как произведение произвольного вектора (того же $\mathbf{0}$) на число 0 (свойство 1.5). Используя это, получаем:

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda(0 \cdot \mathbf{0}) = (\lambda \cdot 0)\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \qquad \blacktriangleright$$

1.3. Линейная зависимость

Из данного набора *векторов* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$ при помощи *линейных операций* можно составить выражение вида

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k, \tag{1.1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольный набор действительных чисел. Такое выражение называют ***линейной комбинацией*** векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, а действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — ***коэффициентами линейной комбинации***. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такую линейную комбинацию называют ***тривиальной***, а в противном случае — ***нетривиальной***.

Конкретный (неупорядоченный) набор векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ линейного пространства будем называть ***системой векторов***, а любую его часть — ***подсистемой***.

Определение 1.2. Систему векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют ***линейно зависимой***, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная *нулевому вектору*. Если же линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору только лишь в случае, когда она тривиальна, систему векторов называют ***линейно независимой***. Опуская слово „система“, часто говорят: векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ ***линейно зависимы*** или соответственно ***линейно независимы***.

Линейная зависимость системы векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ означает, что существуют такие коэффициенты α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{R}$, одновременно не равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно независимы, если из равенства

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$$

вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. В такой интерпретации понятия линейной зависимости и независимости мы будем использовать в различных доказательствах.

Следующее утверждение дает простой критерий линейной зависимости векторов.

Теорема 1.1. Для того чтобы система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных.

◄ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно зависимы. Согласно определению 1.2, это означает, что существуют коэффициенты α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{R}$, одновременно не равные нулю, для которых выполнено равенство (1.2). Не теряя общности, мы можем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, так как этого всегда можно добиться изменением нумерации векторов в системе.

Из равенства (1.2), используя обычные правила преобразования выражений (см. замечание 1.2), находим

$$\boldsymbol{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_k.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Достаточность. Теперь предположим, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. Как и выше, можно, не теряя общности, считать, что таким является вектор $\boldsymbol{x}_1$. Согласно этому предположению, существуют такие коэффициенты $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k.$$

Преобразуя очевидным образом записанное выражение, получаем

$$1\cdot\boldsymbol{x}_1 - \alpha_2\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

В левой части этого равенства стоит линейная комбинация векторов системы. Она равна нулевому вектору, но не все ее коэффициенты равны нулю (например, коэффициент при векторе $\boldsymbol{x}_1$ равен единице). Согласно определению 1.2, это означает, что система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно зависима. ▶

Пример 1.4. В линейном пространстве $C[0, 2\pi]$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$, рассмотрим функции 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$. Система из этих трех элементов линейного пространства линейно зависима, поскольку в силу известной формулы тригонометрии функция $\sin^2 x$ является линейной комбинацией двух других функций:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

1.4. Свойства систем векторов

Непосредственно из *аксиом линейного пространства* можно получить ряд простейших свойств *систем векторов* произвольного линейного пространства $\mathcal{L}$.

1°. Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{L}$ есть *нулевой вектор*, то эта *система векторов линейно зависима.*

◀ Пусть, например, $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$. Тогда *линейная комбинация* $1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k$ является *нетривиальной*, так как первый ее *коэффициент* равен единице. В то же время указанная линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, потому что все ее слагаемые равны нулевому вектору. ▶

2°. Если система векторов содержит линейно зависимую *подсистему*, то она линейно зависима.

◀ Подсистема состоит из части векторов исходной системы. Пусть, например, в системе векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ подсистема $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, $m < n$, линейно зависима. Это значит, что можно указать коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, одновременно не равные нулю, для которых

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}.$$

Введя дополнительные коэффициенты $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_k = 0$, получим линейную комбинацию системы векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. С одной стороны, она не является тривиальной, так как среди первых ее m коэффициентов есть ненулевые, а с другой стороны,

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1} \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \\ = \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{m+1} + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0},$$

так как все коэффициенты начиная с $(m+1)$-го равны нулю. Следовательно, исходная система векторов линейно зависима. ▶

3°. Если *система векторов линейно независима*, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

◀ Это свойство является переформулировкой предыдущего. В самом деле, по свойству 2° система, имеющая линейно зависимую подсистему, не может быть сама линейно независимой. Поэтому у линейно независимой системы вообще не может быть линейно зависимых подсистем. ▶

4°. Если векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно независимы и вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y}$ является линейно независимой.

◀ Действительно, пусть

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m + \beta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.$$

Тогда коэффициент β должен быть нулевым, так как в противном случае мы можем выразить вектор $\boldsymbol{y}$ через остальные. Но слагаемое $\beta\boldsymbol{y}$ в равенстве слева можно при $\beta = 0$ опустить, и мы получаем линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, равную нулевому вектору. В силу линейной независимости этих векторов все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Значит, исходная линейная комбинация является *тривиальной* и поэтому система векторов $\boldsymbol{e}_m, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y}$ линейно независима. ▶

Пример 1.5. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ рассмотрим n векторов

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0),\\
\boldsymbol{e}_2 &= (0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{e}_n &= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1).
\end{aligned}$$

Докажем, что система из этих векторов линейно независима. Так как для любых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

то ясно, что эта линейная комбинация векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ может быть равна нулевому вектору $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ только лишь при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Это и означает, что эта система векторов линейно независима.

Отметим, что если из векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, рассматривая их как строки одинаковой длины, составить матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то ее ранг будет максимальным ($\operatorname{Rg} E = n$), так как E является невырожденной матрицей. По теореме о базисном миноре [III] строки этой матрицы линейно независимы. Таким образом, понятие линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейного арифметического пространства в данном случае согласуется с понятием линейной независимости строк единичной матрицы E.

Пример 1.6. Любые два коллинеарных вектора на плоскости (в V_2) и любые три компланарных вектора в пространстве (в V_3) линейно зависимы. И в том, и в другом случае один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другого (других) [III]. По этой же причине в пространстве линейно зависима любая система из четырех векторов.

Пример 1.7. Пусть в произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ даны два вектора $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$ и пусть $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{d}_1 - 2\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{d}_1 + 3\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}_1 + 5\boldsymbol{d}_2$. Тогда система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима.

В самом деле, составим линейную комбинацию системы векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с произвольными коэффициентами x, y, z и приравняем ее нулевому вектору: $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. В этой линейной комбинации заменим векторы их представлениями через $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$:

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=x(3\boldsymbol{d}_1-2\boldsymbol{d}_2)+y(2\boldsymbol{d}_1+3\boldsymbol{d}_2)+z(\boldsymbol{d}_1+5\boldsymbol{d}_2)=$$
$$=(3x+2y+z)\boldsymbol{d}_1+(-2x+3y+5z)\boldsymbol{d}_2.$$

Теперь достаточно приравнять нулю коэффициенты при $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$, чтобы получить нулевую линейную комбинацию. Значит, если коэффициенты x, y, z удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=0, \\ -2x+3y+5z=0, \end{cases}$$

то линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с коэффициентами x, y, z равна нулевому вектору. Как следует из теории систем линейных алгебраических уравнений [III], указанная система всегда имеет ненулевое решение, поскольку ранг ее матрицы равен двум и меньше трех — количества неизвестных. Например, ненулевым решением является $x=7$, $y=-17$, $z=13$. Значит, существуют такие x, y, z, одновременно не равные нулю, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с этими коэффициентами равна нулевому вектору, т.е. система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима.

1.5. Базис линейного пространства

В *линейном пространстве* наибольший интерес представляют *системы векторов*, в виде *линейной комбинации* которых можно представить любой вектор, причем единственным образом. Если зафиксировать такую систему векторов, то любой вектор можно будет однозначно представить набором чисел, являющихся *коэффициентами* соответствующей *линейной комбинации*, а всевозможные векторные соотношения превратить в соотношения числовые.

Этот подход применялся уже в аналитической геометрии [III]. В пространстве V_2 векторов на плоскости любые два неколлинеарных вектора образуют базис, так как через такую пару векторов любой вектор плоскости выражается однозначно в виде линейной комбинации [III]. Аналогично в V_3 (множестве векторов в пространстве) базис образуют любые три некомпланарных вектора. Для матриц использовалось понятие базисных строк и базисных столбцов. По теореме о базисном миноре базисные строки (столбцы) линейно независимы, а любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов) [III].

Определение 1.3. ***Базисом линейного пространства*** $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1) эта *система векторов линейно независима*;

2) каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Пусть $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ — базис в $\mathcal{L}$. Определение 1.3 говорит о том, что любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ может быть записан следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n.$$

Такую запись называют ***разложением вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***по базису*** $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Данное нами определение базиса согласовывается с понятием базиса в пространстве *свободных векторов* в V_1, V_2 или V_3 [III]. Например, в V_3 базисом была названа любая тройка некомпланарных векторов. Такая тройка векторов является линейно независимой, так как представление одного ее вектора в виде линейной комбинации двух других равносильна компланарности трех векторов. Но, кроме того, из курса векторной алгебры [III] мы знаем, что любой вектор в пространстве можно выразить через произвольные три некомпланараных вектора в виде их линейной комбинации. Три компланарных вектора не могут быть базисом в V_3, так как любая линейная комбинация таких векторов даст вектор, им компланарный.

Теорема 1.2 (о единственности разложения). В линейном пространстве разложение любого вектора по данному базису единственно.

◀ Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ произвольный базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ и предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в этом базисе два разложения

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n,$$
$$\boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n'\boldsymbol{b}_n.$$

Воспользуемся тем, что *аксиомы линейного пространства* позволяют преобразовывать линейные комбинации так же, как и обычные алгебраические выражения. Вычитая записанные равенства почленно, получим

$$(x_1 - x_1')\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (x_n - x_n')\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}.$$

Так как базис — это линейно независимая система векторов, ее линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, лишь если она *тривиальная* (см. определение 1.2). Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю: $x_1 - x_1' = 0, \ldots, x_n - x_n' = 0$. Таким образом, $x_1 = x_1', \ldots, x_n = x_n'$ и два разложения вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ совпадают. ▶

Замечание 1.3. Условие линейной независимости векторов базиса означает, что *нулевой вектор* имеет в этом базисе единственное разложение, а именно тривиальное: все коэффициенты этого разложения равны нулю. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что из единственности разложения нулевого вектора по данной системе векторов вытекает единственность разложения любого другого вектора. #

Согласно определению 1.3, базис является упорядоченной системой векторов. Это значит, что, изменив порядок векторов в системе, мы получим другой базис. Порядок векторов в базисе фиксируют для того, чтобы задать определенный порядок коэффициентов разложения произвольного вектора. Это позволяет заменить линейную комбинацию, представляющую вектор, упорядоченным набором ее коэффициентов и тем самым упростить запись. Порядок векторов в базисе определяется их нумерацией.

Определение 1.4. Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют ***координатами вектора в*** этом ***базисе***.

Пример 1.8. В линейном пространстве $K_2[x]$ многочленов переменного x степени не выше 2 (см. пример 1.1) элементы x и x^2 линейно независимы: их линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ есть многочлен, который равен нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha = \beta = 0$. В то же время пара этих элементов не образует базиса. Действительно, многочлен 1 нулевой степени, являющийся элементом $K_2[x]$, нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов x и x^2. Дело в том, что линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ многочленов x и x^2 есть либо многочлен второй степени (при $\beta \neq 0$), либо многочлен первой степени ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$), либо нулевой многочлен ($\alpha = \beta = 0$). Значит, равенство $1 = \alpha x + \beta x^2$ двух многочленов невозможно ни при каких значениях коэффициентов.

В то же время три многочлена 1, x, x^2 образуют базис линейного пространства $K_2[x]$. Докажем это.

Во-первых, система многочленов 1, x, x^2 линейно независима. Составим их линейную комбинацию с произвольными коэффициентами α, β, γ и приравняем нулю: $\alpha \cdot 1 + \beta x + \gamma x^2 = 0$. Это равенство есть равенство двух многочленов, и оно возможно только в случае, когда коэффициенты этих двух многочленов совпадают. Значит, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Во-вторых, через многочлены 1, x, x^2 можно выразить любой многочлен второй степени, т.е. любой элемент линейного пространства $K_2[x]$ можно представить в виде линейной комбинации указанных трех элементов. Возьмем произвольный многочлен

$$p(x) = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^2.$$

Его запись можно рассматривать как линейную комбинацию многочленов 1, x, x^2:

$$p(x) = \alpha \cdot 1 + \beta x^2 + \gamma x^2,$$

причем коэффициенты многочлена в то же время являются коэффициентами линейной комбинации.

Итак, система трех многочленов 1, x, x^2 линейно независима, а любой элемент линейного пространства $K_2[x]$ является линейной комбинацией указанной системы. Согласно определению 1.3, система многочленов 1, x, x^2 есть базис в $K_2[x]$.

1.6. Линейные операции в координатной форме

Фиксация порядка *векторов* в *базисе* преследует еще одну цель — ввести матричные способы записи векторных соотношений. Базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ в данном *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ удобно записывать как матрицу-строку

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{b}_n),$$

а *координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ в этом базисе — как матрицу-столбец:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Тогда *разложение* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$ *вектора* $\boldsymbol{x}$ *по базису* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ можно записать как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x. \tag{1.4}$$

Пример 1.9. Векторы ортонормированного базиса в V_3 имеют стандартное обозначение и порядок: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В матричной записи это будет выглядеть так: $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})$. Вектор, например, с координатами -1, 2, 2 может быть представлен в виде*

$$\boldsymbol{x} = \{-1;2;2\} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}x,$$

где $x = (-1\ \ 2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$. #

Запись линейных операций над свободными векторами в координатной форме [III] обобщается на случай произвольного линейного пространства.

Теорема 1.3. При *сложении* любых двух векторов в линейном пространстве их координаты в одном и том же базисе складываются, а при *умножении вектора на число* его координаты умножаются на это число.

◄ Рассмотрим в линейном пространстве $\mathcal{L}$ базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{b}_n)$. Пусть даны разложения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в этом базисе:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{b}_n.$$

В силу *аксиом линейного пространства*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) + (y_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{b}_n) = \\ = (x_1 + y_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\boldsymbol{b}_n.$$

Таким образом, при сложении двух векторов их координаты, отвечающие одному базисному вектору, складываются. В матричной записи координат этому соответствует матричная сумма столбцов координат.

*Напомним, что в векторной алгебре [III] мы записывали координаты вектора в строку, ограничивая ее фигурными скобками. Для упрощения выкладок мы отождествляли вектор с набором его координат, хотя, вообще говоря, эти объекты имеют различную природу. В линейной алгебре принято координаты записывать не в строку, а в столбец.

Аналогично для произвольного действительного числа λ

$$\lambda \boldsymbol{x} = \lambda(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = (\lambda x_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (\lambda x_n)\boldsymbol{b}_n,$$

т.е. при умножении вектора на число каждая из его координат умножается на это число. ►

Запись координат векторов в матричной форме снимает вопрос о том, что понимать, например, под сложением координат: координаты складываются как матрицы-столбцы. Аналогично столбец координат умножается на число по правилам умножения матрицы на число. Запись утверждения теоремы 1.3 в матричной форме

$$\boldsymbol{b}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{b}(x+y), \qquad \lambda \boldsymbol{b}x = \boldsymbol{b}(\lambda x)$$

соответствует свойствам матричных операций: дистрибутивности сложения относительно умножения и ассоциативности умножения.

Следствие 1.1. Линейная независимость (зависимость) векторов линейного пространства эквивалентна линейной независимости (зависимости) их столбцов координат в одном и том же базисе этого линейного пространства.

◄ Если вектор $\boldsymbol{a}$ равен *линейной комбинации* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, т.е.

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k,$$

то его столбец координат a в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ равен такой же линейной комбинации столбцов координат $a_1, \ldots, a_k$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в этом же базисе:

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k.$$

Это следует из равенств:

$$\boldsymbol{b}a = \boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \alpha_1(\boldsymbol{b}a_1) + \ldots + \alpha_k(\boldsymbol{b}a_k) = \\ = \boldsymbol{b}(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k). \quad ►$$

Пример 1.10. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0,\ 1,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \end{aligned} \tag{1.5}$$

образуют базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)$, так как они линейно независимы (см. пример 1.5) и любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$. #

Базис (1.5) в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют ***стандартным.***

Замечание 1.4. В линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ его столбец координат x в стандартном базисе совпадает с $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$. Как и в аналитической геометрии [III], удобно при фиксированном базисе отождествлять вектор с его координатами. Для стандартного базиса это равносильно записи вектора не как матрицы-строки, а как матрицы-столбца. Отметим, что запись элементов арифметического пространства в виде столбца не противоречит определению арифметического пространства, понимаемого как множество упорядоченных совокупностей чисел. Порядок же элементов можно указывать как при помощи записи в строку, так и при помощи записи в столбец.

Пример 1.11. Покажем, что в $\mathbb{R}^3$ система векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ -1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2,\ 1,\ 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (4,\ -1,\ 1)$$

образует базис и найдем в этом базисе координаты вектора $\boldsymbol{c} = (2,\ 1,\ 3)$.

Для того чтобы доказать, что система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образует базис, надо убедиться в линейной независимости этих векторов и в том, что любой вектор $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \in \mathbb{R}^3$ является их линейной комбинацией.

В стандартном базисе $\boldsymbol{e}$ в $\mathbb{R}^3$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют следующие столбцы координат:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из столбцов координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим квадратную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$, $x = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)^{\mathrm{T}}$. Так как $\det A = -9$, то матрица A невырожденная, ее ранг равен 3 и все ее столбцы являются базисными. Поэтому, во-первых, согласно теореме о базисном миноре [III], эти столбцы линейно независимы, что, согласно следствию 1.1, означает линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, а во-вторых, СЛАУ $Ax = b$ при любом столбце b правых частей имеет решение $x = (x'_1\ \ x'_2\ \ x'_3)^{\mathrm{T}}$, что после записи этой СЛАУ в векторной форме [III]

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

позволяет сделать вывод о выполнении равенства

$$x'_1\boldsymbol{a}_1 + x'_2\boldsymbol{a}_2 + x'_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}.$$

В частности, решив СЛАУ $Ax = c$, которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \end{cases}$$

находим координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)$: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

1.7. Размерность линейного пространства

Эта важнейшая характеристика *линейного пространства* связана со свойствами систем векторов в этом пространстве.

Определение 1.5. Максимальное количество *линейно независимых векторов* в данном линейном пространстве называют ***размерностью линейного пространства.***

Если размерность линейного пространства $\mathcal{L}$ равна n, т.е. существует линейно независимая система из n векторов, а любая *система векторов*, содержащая $n+1$ вектор или более, *линейно зависима*, то говорят, что это линейное пространство ***n-мерно***. Размерность такого линейного пространства обозначают $n = \dim \mathcal{L}$.

Существуют линейные пространства, в которых можно выбрать линейно независимую систему, содержащую сколь угодно большое количество векторов. Такие линейные пространства называют ***бесконечномерными***. В отличие от них, n-мерные линейные пространства называют ***конечномерными***. Эта книга посвящена конечномерным линейным пространствам.

Пример 1.12. Линейное пространство $C[0,1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ (см. **1.1**), является бесконечномерным, так как для любого натурального n система многочленов 1, x, x^2, ..., x^n, являющихся элементами этого линейного пространства, линейно независима. В самом деле, *линейная комбинация* этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов α_0, α_1, ..., α_n, есть многочлен

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n,$$

который является нулевым (т.е. равен постоянной функции 0), только если все его коэффициенты (они же *коэффициенты линейной комбинации*) равны нулю. #

Оказывается, что размерность линейного пространства тесно связана с количеством векторов, которое может иметь *базис* линейного пространства.

Теорема 1.4. Если линейное пространство $\mathcal{L}$ n-мерно, то любая линейно независимая система из n векторов является его базисом.

◄ Пусть система векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in \mathcal{L}$ линейно независима. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ система векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ линейно зависима, так как она содержит $n+1$ вектор, т.е. количество большее, чем размерность линейного пространства. Это значит, что существуют такие коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что

$$\alpha_0 \boldsymbol{x} + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Заметим, что $\alpha_0 \neq 0$, так как в противном случае равенство (1.6) сводится к равенству

$$\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n = \mathbf{0},$$

причем среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ есть хотя бы один ненулевой (так как $\alpha_0 = 0$). Но это означало бы, что система векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ линейно зависима.

Учитывая, что $\alpha_0 \neq 0$, из (1.6) находим

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\boldsymbol{b}_1 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\boldsymbol{b}_n.$$

Так как вектор $\boldsymbol{x}$ был выбран произвольно, заключаем, что любой вектор в линейном пространстве $\mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации системы векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Поэтому эта система векторов, по предположению линейно независимая, является базисом в $\mathcal{L}$. ►

Теорема 1.5. Если в линейном пространстве $\mathcal{L}$ существует базис из n векторов, то $\dim \mathcal{L} = n$.

◄ Пусть $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Нам достаточно показать, что любая система $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ из $n+1$ вектора из $\mathcal{L}$ линейно зависима.

Разложим каждый из этих векторов $\boldsymbol{x}_i$ по базису $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{b}_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{x}_{n+1} &= a_{1,n+1}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{n,n+1}\boldsymbol{b}_n,\end{aligned}$$

а из столбцов координат векторов $\boldsymbol{x}_i$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \ldots & \boldsymbol{a}_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

типа $n\times(n+1)$. Согласно следствию 1.1, линейная зависимость системы векторов $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_{n+1}$ равносильна линейной зависимости столбцов матрицы A, так как выполнение каких-либо линейных операций над векторами идентично выполнению тех же операций над их столбцами координат. Но в матрице A содержится n строк, поэтому ее ранг не превосходит n. Следовательно, при любом выборе базисного минора хотя бы один из столбцов матрицы не является базисным и по теореме о базисном миноре [III] является линейной комбинацией базисных. Но тогда такое же соотношение справедливо для соответствующих векторов. Следовательно, согласно необходимому и достаточному условию линейной зависимости (см. теорему 1.1), система векторов $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_{n+1}$ линейно зависима, так как один из них равен линейной комбинации остальных. ►

Из теорем 1.4 и 1.5 следует, что в каждом линейном пространстве любые два базиса содержат одно и то же количество векторов, и это количество равно размерности линейного пространства.

Пример 1.13. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *стандартный базис* (1.5) состоит из n векторов, поэтому $\dim\mathbb{R}^n = n$, что и отражено в обозначении этого линейного пространства.

Пример 1.14. Рассмотрим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

множество решений которой образует линейное пространство. Найдем размерность этого линейного пространства и какой-либо базис в нем.

Следуя [Ш], решим эту систему, определив ее *фундаментальную систему решений*. Для этого запишем матрицу системы и при помощи *элементарных преобразований строк* приведем ее к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из полученного вида находим, что ранг матрицы системы равен 2, в качестве свободных неизвестных можно взять x_3 и x_4, а в качестве базисных неизвестных — x_1 и x_2. Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ \qquad\ \ x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, находим $x_2 = -1$, $x_1 = -4$, а при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ имеем $x_2 = -3$, $x_1 = -5$. Записав найденные решения в виде столбцов, получим фундаментальную систему решений:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теории систем линейных алгебраических уравнений [Ш], эти два решения линейно независимы, а любое другое решение СЛАУ представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{x}^{(1)}$

и $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Другими словами, столбцы $\boldsymbol{x}^{(1)}$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}$ образуют базис в линейном пространстве решений рассматриваемой однородной СЛАУ. Размерность этого линейного пространства равна двум — количеству векторов в базисе.

1.8. Преобразование координат вектора при замене базиса

В *линейном пространстве* все *базисы* равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования *координат векторов*, которое связано с изменением базиса.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ и новый $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{c}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\boldsymbol{b}$. В частности, каждый вектор из базиса $\boldsymbol{c}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов базиса $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\boldsymbol{b}_n, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1, n},$$

или

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Определение 1.6. Матрицу (1.7) называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$.

Согласно данному определению, i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Обсудим некоторые свойства матрицы перехода.

1°. Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

◄ Действительно, столбцы матрицы перехода — это столбцы координат векторов нового базиса в старом. Следовательно, они, как и векторы базиса, *линейно независимы*. Значит, матрица U невырожденная и имеет обратную матрицу U^{-1} [III]. ►

2°. Если в n-мерном линейном пространстве задан базис $\boldsymbol{b}$, то для любой невырожденной квадратной матрицы U порядка n существует такой базис $\boldsymbol{c}$ в этом линейном пространстве, что U будет матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{c}$.

◄ Из невырожденности матрицы U следует, что ее ранг равен n, и поэтому ее столбцы, будучи базисными, линейно независимы. Эти столбцы являются столбцами координат векторов системы $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$. Линейная независимость столбцов матрицы U равносильна линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{c}$. Так как система $\boldsymbol{c}$ содержит n векторов, причем линейное пространство n-мерно, то, согласно теореме 1.4, эта система является базисом. ►

Пример 1.15. Пусть $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3)$ — базис линейного пространства. Тогда система векторов $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_2 = -\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3$ тоже является базисом в этом линейном пространстве. Это следует из того, что

$$(\boldsymbol{c}_1\ \ \boldsymbol{c}_2\ \ \boldsymbol{c}_3) = (\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3)\,U,$$

где диагональная матрица $U = \operatorname{diag}(2,\ -1,\ 1)$ невырождена.

3°. Если U — матрица перехода от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$ линейного пространства, то U^{-1} — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{b}$.

◀ Матрица U невырождена, и поэтому из равенства $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$ следует, что $\boldsymbol{c}U^{-1} = \boldsymbol{b}$. Последнее равенство означает, что столбцы матрицы U^{-1} являются столбцами координат векторов базиса $\boldsymbol{b}$ относительно базиса $\boldsymbol{c}$, т.е., согласно определению 1.6, U^{-1} — это матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{b}$. ▶

4°. Если в линейном пространстве заданы базисы $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, причем U — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{c}$, а V — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{d}$, то произведение этих матриц UV — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{d}$.

◀ Согласно определению 1.6 матрицы перехода, имеем равенства

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}V,$$

откуда

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}V = (\boldsymbol{b}U)V = \boldsymbol{b}(UV),$$

т.е. UV — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{d}$. ▶

Рассмотрим теперь, как преобразуются координаты произвольного вектора в линейном пространстве при переходе от старого базиса к новому. Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и разложим его в старом базисе:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Разложение того же вектора в новом базисе имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}x', \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Найдем связь между старыми координатами x вектора $\boldsymbol{x}$ и новыми его координатами x'. Из соотношений (1.8), (1.9) следует, что $\boldsymbol{b}x = \boldsymbol{c}x'$. Учитывая, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$, получаем $\boldsymbol{b}x = (\boldsymbol{b}U)x'$, или $\boldsymbol{b}x = \boldsymbol{b}(Ux')$. Последнее равенство можно рассматривать как запись двух разложений одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$. Разложениям соответствуют столбцы координат x и Ux', которые, согласно теореме 1.2 о единственности разложения вектора по базису, должны быть равны:

$$x = Ux', \qquad \text{или} \qquad x' = U^{-1}x.$$

Итак, чтобы получить координаты вектора в старом базисе, необходимо столбец координат этого вектора в новом базисе умножить слева на матрицу перехода из старого базиса в новый. Матрица перехода из старого базиса в новый позволяет пересчитывать новые координаты в старые.

Пример 1.16. Рассмотрим в V_2 ортонормированный базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j})$ из векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Обозначим через $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)$ новый базис, который получается поворотом старого базиса $\boldsymbol{b}$ на заданный угол φ. Исходя из заданного угла поворота мы можем найти координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ нового базиса относительно старого (рис. 1.2):

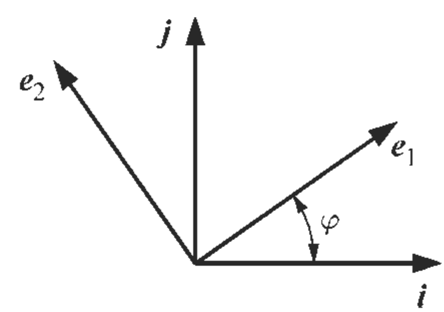


Рис. 1.2

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Эти разложения позволяют составить матрицу перехода U из старого базиса $\boldsymbol{b}$ в новый $\boldsymbol{e}$, а также обратную матрицу:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Найденные матрицы перехода U (из старого базиса в новый) и U^{-1} (из нового базиса в старый) позволяют записать соотношения между старыми x_1, x_2 и новыми x_1', x_2' координатами произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ из V_2:

$$x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \qquad x_1 = x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi,$$
$$x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, \qquad x_2 = x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi.$$

Например, вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ в старом базисе имеет координаты $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, а в новом базисе — $x_1' = \cos\varphi + \sin\varphi$, $x_2' = -\sin\varphi + \cos\varphi$.

Пример 1.17. Пусть в линейном пространстве V_3 заданы два правых ортонормированных базиса: старый $(\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})$ и новый $(\boldsymbol{i}'\ \ \boldsymbol{j}'\ \ \boldsymbol{k}')$. Тогда старый базис можно преобразовать в новый при помощи трех поворотов вокруг координатных осей прямоугольной системы координат, определяемой ортонормированным базисом.

Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{s}$, который одновременно лежит в плоскостях пар векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$. Повернем базис $(\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})$ вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}$ на некоторый угол ψ так, что вектор $\boldsymbol{i}$ совпадет с вектором $\boldsymbol{s}$. Отметим, что вектор $\boldsymbol{s}$ ортогонален и вектору $\boldsymbol{k}$, и вектору $\boldsymbol{k}'$, так как является линейной комбинацией и пары $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, и пары $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$. Значит, поворотом вокруг оси вектора $\boldsymbol{s}$ на некоторый угол ϑ можно добиться совмещения вектора $\boldsymbol{k}$ с вектором $\boldsymbol{k}'$. Наконец, поворотом вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}'$ на некоторый угол φ совместим вектор $\boldsymbol{s}$ с вектором $\boldsymbol{i}'$ (рис. 1.3).

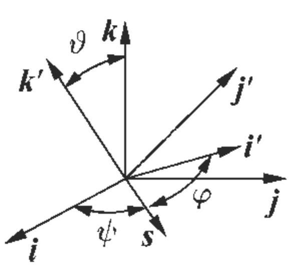


Рис. 1.3

Матрица перехода, соответствующая первому повороту вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}$, имеет вид

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода A_2, соответствующая повороту уже нового базиса вокруг оси вектора $\boldsymbol{s}$ на угол ϑ, похожа на предыдущую:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Наконец, матрица перехода, соответствующая третьему повороту вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}'$ имеет вид

$$U_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 4°, матрица перехода U из старого базиса $(\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})$ в новый базис $(\boldsymbol{i}'\ \ \boldsymbol{j}'\ \ \boldsymbol{k}')$ равна $U = U_1U_2U_3$ и может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Дополнение 1.1. Линейное пространство над полем P

Мы ввели понятие *линейного пространства* как множества произвольной природы, на котором заданы две операции: *сложение элементов* множества и *умножение элементa* множества *на число*. Согласно замечанию 1.1, под числами можно понимать как действительные числа, так и комплексные. Обе операции должны подчиняться *аксиомам линейного пространства*, при этом происхождение этих операций совершенно несущественно.

Этот подход можно развивать, давая понятию „число" расширительное толкование. Само понятие числа характеризуется в первую очередь тем, что над числами можно выполнять четыре арифметические операции. Если наличие четырех арифметических операций взять за основу, мы придем к алгебраической структуре, называемой полем. Напомним, что в самом широком толковании ***алгебраическая структура*** (алгебраическая система) — это некоторое множество, на котором задана одна или несколько алгебраических операций, подчиняющихся некоторому набору аксиом. ***Алгебраическая операция*** (внутренний закон композиции, [I-4.1]) на множестве X — это такой закон, или правило, который любому упорядоченному набору $x_1, \ldots, x_n$ элементов множества X (операндов) ставит в соответствие единственный элемент того же множества (результат этой операции). Наиболее распространены ***бинарные алгебраические операции***, имеющие два операнда (т.е. $n = 2$).

Определение 1.7. ***Полем*** называют множество P произвольной природы, на котором заданы две бинарные алгебраические операции, условно сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$, подчиняющиеся следующим ***аксиомам поля***:

а) сложение коммутативно: $a + b = b + a$;

б) сложение ассоциативно: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

в) существует такой элемент $0 \in P$ (***нулевой элемент***, или ***нуль***), что $a + 0 = a$ для любого элемента $a \in P$;

г) каждый элемент $a \in P$ имеет ***противоположный*** (симметричный) ***элемент*** $(-a)$, такой, что $a + (-a) = 0$;

д) умножение коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$;

е) умножение ассоциативно: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

ж) существует такой элемент $e \in P$ (***единичный***), что $a \cdot e = a$ для любого $a \in P$;

з) каждый элемент $a \in P$, $a \neq 0$, имеет ***обратный элемент*** a^{-1}, такой, что $a \cdot a^{-1} = e$;

и) умножение дистрибутивно относительно сложения: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Отметим, что первые четыре аксиомы поля, относящиеся к операции сложения, совпадают с соответствующими *аксиомами* *линейного пространства.* Так же как и в линейном пространстве, исходя из аксиом в) и г) строим операцию вычитания, полагая, например, что, по определению,

$$a - b = a + (-b).$$

Аксиомы ж) и з), относящиеся к умножению, аналогичны аксиомам в) и г). Они позволяют определить операцию деления:

$$a/b = a \cdot b^{-1}, \quad b \neq 0.$$

Сложение и умножение задаются в поле априори, их называют ***основными операциями***, а вычитание и деление, которые базируются на свойствах основных операций, называют ***дополнительными операциями***.

Аксиомы поля позволяют с его элементами оперировать так же, как и с числами. Сохраняются основные правила преобразования выражений. В записи выражений используют те же соглашения, что и в записи числовых выражений. Знак операции умножения опускают, если сомножители обозначены буквами, т.е. вместо $a \cdot b$ пишут ab. В выражениях действует приоритет операций умножения и деления по отношению к сложению и вычитанию. Если в выражении записаны несколько операций подряд, то сперва выполняются более приоритетные операции. Операции одного приоритета выполняются в порядке слева направо. Например, в выражении $a + bc - d/f$ сперва следует операция умножения bc, затем деления d/f, затем сложения, последней выполняется операция вычитания.

Операция умножения на число в линейном пространстве на самом деле не опирается на специфические свойства действительных чисел. Важно лишь, что числа можно умножать (используется в аксиомах д) и е) линейного пространства) и складывать (аксиома ж)). Операция сложения вообще оперирует только элементами линейного пространства. Поэтому можно, опираясь на то же определение 1.1, ввести ***линейное пространство над*** произвольным ***полем*** P. Такое линейное пространство определяют как множество произвольной природы, на котором заданы две операции: сложение, подчиняющееся аксиомам а)–г) линейного пространства, и умножение элементов линейного пространства на элементы поля P, подчиняющееся аксиомам д)–з) линейного пространства.

В качестве поля P чаще всего рассматривают поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Это объясняет введенную ранее терминологию („линейное пространство над полем действительных чисел“, „линейное пространство над полем комплексных чисел“, см. замечание 1.1).

Пример 1.18. Рассмотрим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} (2+i)x_1 + (3-2i)x_2 - 7x_3 = 0, \\ (1-i)x_1 + x_2 - (3-2i)x_3 = 0, \\ 3ix_1 + (1-2i)x_2 - (1+4i)x_3 = 0 \end{cases}$$

с комплексными коэффициентами. Множество ее решений представляет собой комплексное линейное пространство. Размерность и базис этого пространства мы определим, если найдем фундаментальную систему решений этой СЛАУ. Решаются системы с комплексными коэффициентами по той же схеме, что и СЛАУ с действительными коэффициентами. Записываем матрицу СЛАУ и при помощи элементарных преобразований строк приводим ее к ступенчатому виду. Чтобы упростить вычисления, используем умножение строк на комплексные числа, сопряженные к элементам первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-2i & -7 \\ 1-i & 1 & -3+2i \\ 3i & 1-2i & -1-4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4-7i & -14+7i \\ 2 & 1+i & -5-i \\ 3 & -2-i & -4+i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3-2i & 1+2i \\ 5 & 4-7i & -14+7i \\ 2 & 1+i & -5-i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3-2i & 1+2i \\ 0 & 19+3i & -19-3i \\ 0 & 7+5i & -7-5i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3-2i & 1+2i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что ранг матрицы СЛАУ равен двум, а значит, линейное пространство решений одномерно. В качестве базисных неизвестных можно взять x_1, x_2, тогда x_3 — свободное неизвестное. Полагая $x_3 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. Таким образом, фундаментальная система решений рассматриваемой СЛАУ имеет один вектор $\boldsymbol{x}^{(1)} = (2\ \ 1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, а общее решение имеет вид

$$\boldsymbol{x} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C — произвольное комплексное число. #

Далее мы будем рассматривать линейные пространства только над полем действительных чисел.

Вопросы и задачи

1.1. Может ли линейное пространство состоять из: а) двух элементов; б) одного элемента; в) 100 элементов?

1.2. Выясните, образует ли линейное пространство:

а) множество всех векторов данной плоскости, не параллельных данной прямой, относительно линейных операций над векторами;

б) множество всех векторов плоскости с началом в начале системы координат, расположенных в правой полуплоскости, относительно обычных операций сложения и умножения векторов;

в) множество кососимметрических матриц третьего порядка относительно операции сложения матриц и умножения матрицы на число;

г) множество функций вида $a\cos t + b\sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число;

д) множество многочленов степени n относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

1.3. Пусть множество M состоит из одного элемента $\boldsymbol{a}$. Определим операции сложения и умножения на действительное число α соответственно равенствами: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $\alpha\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$. Является ли M линейным пространством?

1.4. Предположим, что множество M состоит из всевозможных упорядоченных пар действительных чисел $\boldsymbol{x}=(\alpha_1,\alpha_2)$. Пусть на этом множестве заданы следующие операции: а) если $\boldsymbol{x}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{y}=(\beta_1,\beta_2)$, то $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$; б) если $\gamma\in\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{x}\in M$, то $\gamma\boldsymbol{x}=(\gamma\alpha_1,\alpha_2)$. Является ли M линейным пространством?

1.5. Является ли линейным пространством множество всех действительных чисел, если операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ на число ввести следующим образом: $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\alpha\odot\boldsymbol{x}=|\alpha|\boldsymbol{x}$?

1.6. Докажите, что множество матриц-столбцов высоты n образует линейное пространство относительно матричных операций сложения и умножения.

1.7. В линейном пространстве V_3 заданы три вектора

$$\boldsymbol{a}_1=\{1;4;3\},\qquad \boldsymbol{a}_2=\{3;3;2\},\qquad \boldsymbol{a}_3=\{8;1;3\}.$$

Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найдите зависимость между векторами (нулевую нетривиальную линейную комбинацию этих векторов).

1.8. Пусть в линейным пространстве $\mathcal{L}$ задана линейно независимая система из n векторов. При каких условиях можно утверждать, что $\dim\mathcal{L}=n$?

1.9. Докажите, что $\dim V_2=2$, $\dim V_3=3$.

1.10. Найдите размерность линейного пространства, состоящего из решений системы линейных однородных уравнений [III]. Как связаны между собой понятия: а) базис и фундаментальная система решений; б) размерность линейного пространства решений и ранг матрицы системы?

1.11. Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ линейного пространства $\mathcal{L}$ заданы своими координатами в некотором базисе:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Является ли система этих векторов линейно зависимой? Дайте ответ, не проводя вычислений.

1.12. Выясните, образуют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad & \boldsymbol{a}_2 &= (1,\ 1,\ 0,\ 0), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (1,\ 1,\ 1,\ 0), \qquad & \boldsymbol{a}_4 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

базис в линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$?

1.13. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)$, если известны его координаты $(-1\ 4\ 3)^{\mathrm{T}}$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$, а базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3, \\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3, \\ \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3. \end{cases}$$

1.14. В линейном пространстве две системы векторов $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ и $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что эти системы являются базисами. Найдите: а) матрицу $U = P_{be}$ перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{e}$; б) матрицу P_{eb} обратного перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{b}$; в) координаты вектора $\boldsymbol{e}_2$ в обоих базисах; г) координаты вектора $\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3$ в базисе $\boldsymbol{e}$.

1.15. Найдите размерность $\dim M_{nm}(\mathbb{R})$ линейного пространства матриц типа $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$.

1.16. Является ли матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицей перехода от одного базиса трехмерного линейного пространства к его другому базису?

1.17. Какой вид имеет матрица перехода от старого базиса к новому, если матрица перехода от нового базиса к старому является: а) треугольной; б) симметрической; в) кососимметрической?

1.18. Может ли в пространстве V_3 матрица перехода быть кососимметрической?

1.19. При каких условиях векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ в пространстве V_3 образуют базис?

1.20. Докажите, что в линейном пространстве $K_n[x]$ многочлены $(x-a)^k$, $k = \overline{0, n}$, $a = \mathrm{const}$, образуют базис. Найти координаты произвольно взятого многочлена $p(x) \in K_n[x]$ в этом базисе.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение и примеры

В любом *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ можно выделить такое подмножество *векторов*, которое относительно операций из $\mathcal{L}$ само является линейным пространством. Это можно делать различными способами, и структура таких подмножеств несет важную информацию о самом линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Определение 2.1. Подмножество $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называют ***линейным подпространством***, если выполнены следующие два условия:

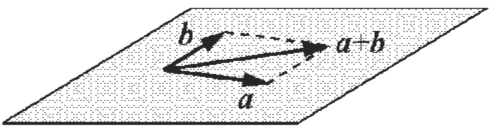
1) *сумма* любых двух *векторов* из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H} \implies \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$;

2) *произведение* любого *вектора* из $\mathcal{H}$ *на* любое действительное *число* снова принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$.

Определение 2.1 фактически говорит о том, что линейное подпространство — это любое *подмножество* данного линейного пространства, *замкнутое относительно линейных операций*, т.е. применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества. Покажем, что линейное подпространство $\mathcal{H}$ как самостоятельный объект является линейным пространством относительно операций, заданных в объемлющем линейном пространстве $\mathcal{L}$. В самом деле, эти операции определены для любых элементов множества $\mathcal{L}$, а значит, и для элементов подмножества $\mathcal{H}$. Определение 2.1 фактически требует, чтобы для элементов из $\mathcal{H}$ результат выполнения операций также принадлежал $\mathcal{H}$. Поэтому операции, заданные в $\mathcal{L}$, можно рассматривать как операции и на более узком множестве $\mathcal{H}$. Для этих операций на множестве $\mathcal{H}$ аксиомы линейного пространства а)–б) и д)–з) выполнены в силу того, что они справедливы в $\mathcal{L}$. Кроме того, выполнены и две оставшиеся аксиомы, поскольку, согласно определению 2.1, если $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, то: 1) $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$ и $\mathbf{0}$ — *нулевой вектор* в $\mathcal{H}$; 2) $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$.

В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и ***нулевое подпространство*** $\{\mathbf{0}\}$, состоящее из единственного элемента $\mathbf{0}$. Эти линейные подпространства называют ***несобственными***, в то время как все остальные линейные подпространства называют ***собственными***. Приведем примеры собственных линейных подпространств.

Пример 2.1. В линейном пространстве V_3 свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют: а) все векторы, параллельные данной плоскости; б) все векторы, параллельные данной прямой. Это вытекает из следующих соображений. Из определения суммы свободных векторов [III] следует, что два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и их сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ компланарны (рис. 2.1, *а*). Поэтому, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны данной плоскости, то этой же плоскости будет параллельна и их сумма. Тем самым установлено, что для случая а) выполнено условие 1) определения 2.1. Если вектор умножить на число, получится вектор, коллинеарный исходному (рис. 2.1, *б*). Это доказывает выполнение условия 2) определения 2.1. Случай б) обосновывается аналогично.



а

б

Рис. 2.1

Линейное пространство V_3 дает наглядное представление о том, что такое линейное подпространство. Действительно, фиксируем некоторую точку в пространстве. Тогда различным плоскостям и различным прямым, проходящим через эту точку, будут соответствовать различные линейные подпространства из V_3 (рис. 2.2).

Не столь очевидно, что в V_3 нет других собственных подпространств. Если в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ в V_3 нет ненулевых векторов, то $\mathcal{H}$ — нулевое линейное подпространство, являющееся несобственным. Если в $\mathcal{H}$ есть ненулевой вектор, а любые два вектора из $\mathcal{H}$ коллинеарны, то все векторы этого линейного подпространства параллельны некоторой прямой, проходящей через фиксированную точку. Следовательно, $\mathcal{H}$ совпадает с одним из линейных подпространств, описанных в случае б). Если в $\mathcal{H}$ есть два неколлинеарных вектора, а любые три вектора компланарны, то все векторы такого линейного подпространства параллельны некоторой плоскости, проходящей через фиксированную точку. Это случай а). Пусть в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ существуют три некомпланарных вектора. Тогда они образуют *базис* в V_3. Любой свободный вектор можно представить в виде *линейной комбинации* этих векторов. Значит, все свободные векторы попадают в линейное подпространство $\mathcal{H}$, и поэтому оно совпадает с V_3. В этом случае мы получаем несобственное линейное подпространство.

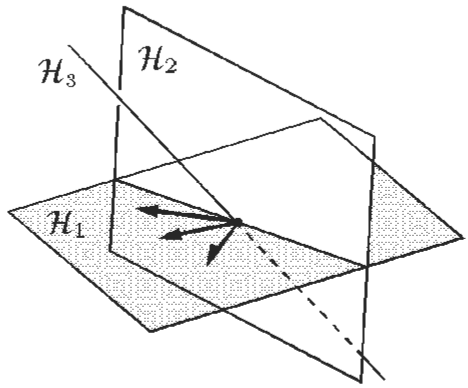


Рис. 2.2

Итак, в V_3 все собственные подпространства можно представить в виде плоскостей или прямых, проходящих через фиксированную точку.

Пример 2.2. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от n переменных можно рассматривать как вектор в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$. Множество всех таких векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, решения однородной СЛАУ можно покомпонентно складывать и умножать на действительные числа, т.е. по правилам сложения векторов из $\mathbb{R}^n$. Результат операции снова будет решением однородной СЛАУ (см. [III]). Значит, оба условия определения линейного подпространства выполнены.

Уравнение $x + y - 5z = 0$ имеет множество решений, которое является линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$. Но это же уравнение можно рассматривать как уравнение плоскости в некоторой прямоугольной системе координат Oxyz. Плоскость проходит через начало координат, а радиус-векторы всех точек плоскости образуют двумерное подпространство в линейном пространстве V_3.

Множество решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0, \\ -x + y \phantom{{}-5z} = 0 \end{cases}$$

также образует линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$. В то же время эту систему можно рассматривать как *общие уравнения прямой* в пространстве, заданные в некоторой прямоугольной системе координат Oxyz. Эта прямая проходит через начало координат, а множество радиус-векторов всех ее точек образует одномерное подпространство в V_3.

Пример 2.3. В линейном пространстве $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют: а) все симметрические матрицы; б) все кососимметрические матрицы; в) все верхние (нижние) треугольные матрицы. При сложении таких матриц или умножении на число мы получаем матрицу того же вида. Напротив, подмножество вырожденных матриц не является линейным подпространством, так как сумма двух вырожденных матриц может быть невырожденной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. В линейном пространстве $C[0,1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, можно выделить следующие линейные подпространства: а) множество функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых в интервале $(0,1)$ (в основе этого утверждения лежат свойства дифференцируемых функций: сумма дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, произведение дифференцируемой функции на число есть дифференцируемая функция); б) множество всех многочленов; в) множество $K_n[x]$ всех многочленов степени не выше n. Напротив, множество всех монотонных функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, очевидно, является подмножеством $C[0,1]$, но не является линейным подпространством, так как сумма двух монотонных функций может и не быть монотонной функцией. #

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана *система векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ всех векторов в $\mathcal{L}$, которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов. Это множество является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{e}_k.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (x_k + y_k)\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{H},$$
$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\lambda x_k)\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{H},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$. Описанное линейное подпространство называют ***линейной оболочкой*** системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и обозначают $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$.

Примечательно то, что любое собственное линейное подпространство можно представить как линейную оболочку некоторой системы его векторов (это будет ясно из дальнейшего изложения). В этом состоит универсальный способ описания линейных подпространств. Отметим, что само линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

Пример 2.5. Рассмотрим плоскость π, проходящую через три произвольные точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Тогда линейное подпространство векторов, компланарных плоскости π, представляет собой линейную оболочку двух свободных векторов, соответствующих геометрическим векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.3). Действительно, любой вектор, компланарный векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, представляется в виде их линейной комбинации [III].

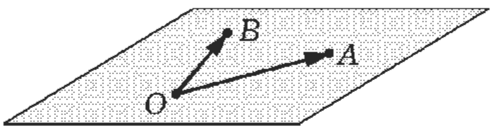


Рис. 2.3

2.2. Пересечение и сумма линейных подпространств

Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — *линейные подпространства* в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Определение 2.2. Множество $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ называют ***пересечением линейных подпространств*** $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

На рис. 2.4 видим, что два линейных подпространства, изображенные плоскостями, в пересечении дают прямую, также являющуюся представлением некоторого линейного подпространства (см. пример 2.1).

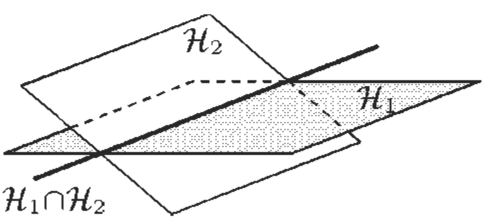


Рис. 2.4

Теорема 2.1. Пересечение $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ двух линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$.

◄ Проверим, выполняется ли условие 1) определения 2.1. Если *векторы* $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ принадлежат $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, то каждый из этих векторов принадлежит как $\mathcal{H}_1$, так и $\mathcal{H}_2$. Поскольку $\mathcal{H}_1$ —

линейное подпространство, то, согласно определению 2.1, заключаем, что вектор $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, равный *сумме векторов* этого линейного подпространства, тоже принадлежит $\mathcal{H}_1$. Аналогично $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{H}_2$, так как каждое из слагаемых является элементом линейного подпространства $\mathcal{H}_2$. Следовательно, $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Проверим условие 2) определения 2.1. Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Тогда $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_1$ и $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_2$. Так как $\mathcal{H}_1$ является линейным подпространством, то *произведение элемента* $\boldsymbol{x}$ этого линейного подпространства *на* произвольное действительное *число* λ принадлежит $\mathcal{H}_1$. Но совершенно аналогично вектор $\lambda\boldsymbol{x}$ принадлежит и $\mathcal{H}_2$. Поэтому $\lambda\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Итак, оба условия определения 2.1 выполнены. Следовательно, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ является линейным подпространством. ►

Определение 2.3. Множество $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ всех векторов $\boldsymbol{x}$ вида $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{H}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{H}_2$, называют ***суммой линейных подпространств*** $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

На рис. 2.5 линейные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ представлены несовпадающими прямыми, проходящими через фиксированную точку O. Их сумма представляется плоскостью, содержащей обе прямые.

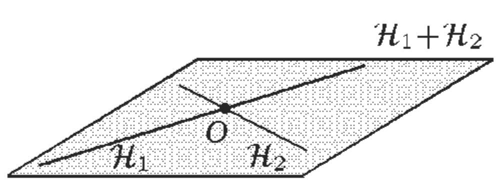


Рис. 2.5

Теорема 2.2. Сумма линейных подпространств данного линейного пространства является линейным подпространством в том же линейном пространстве.

◄ Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ из множества $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$. Согласно определению 2.3, имеют место представления

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,$$

где векторы $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$ принадлежат $\mathcal{H}_i$, $i=1,2$. Складывая эти равенства, получаем

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2).$$

Сумма $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1$ векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_1$ линейного подпространства $\mathcal{H}_1$ принадлежит $\mathcal{H}_1$. Точно так же сумма $\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2$ векторов $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{y}_2$ линейного подпространства $\mathcal{H}_2$ принадлежит $\mathcal{H}_2$. Поэтому вектор $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ принадлежит множеству $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$.

Условие 2) определения 2.1 проверяется аналогично. Произвольный вектор $\boldsymbol{v}\in\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ имеет представление $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{H}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{H}_2$. Для любого действительного числа λ получаем равенства

$$\lambda\boldsymbol{v}=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2.$$

Так как вектор $\lambda\boldsymbol{x}_1$ принадлежит $\mathcal{H}_1$, а вектор $\lambda\boldsymbol{x}_2$ — $\mathcal{H}_2$, то вектор $\lambda\boldsymbol{v}$ является элементом множества $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$.

Мы доказали, что множество $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ *замкнуто относительно линейных операций* объемлющего линейного пространства и поэтому, согласно определению 2.1, оно является линейным подпространством. ▶

Пример 2.6. Рассмотрим две однородные системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\ldots+\ a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\ldots+\ a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n=0,\\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{k1}x_1+c_{k2}x_2+\ldots+c_{kn}x_n=0. \end{cases}$$

Множества решений этих систем представляют собой линейные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ *линейного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$. Объединив обе системы в одну, получим новую однородную систему, множеством решений которой будет линейное подпространство $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Пример 2.7. Рассмотрим две системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$ в некотором линейном пространстве $\mathcal{L}$. *Линейные оболочки* этих систем представляют собой линейные подпространства $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ и $\mathcal{H}_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l\}$ в $\mathcal{L}$. Если мы объединим обе системы в одну, то у новой, объединенной системы линейной оболочкой будет линейное подпространство $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. В самом деле, любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ разлагается в сумму $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{H}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{H}_2$. Векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ представляются в виде линейной комбинации, первый — векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, второй — векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$. Значит, их сумма представляется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}$ принадлежит $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l\}$. Предположим теперь, что вектор $\boldsymbol{x}$ принадлежит указанной линейной оболочке, т.е. имеет место представление

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{e}_k + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f}_l.$$

Положив

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{e}_k,$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f}_l,$$

приходим к представлению $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, в котором $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{H}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{H}_2$. Значит, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Пример 2.8. Линейное подпространство из примера 2.5, являющееся линейной оболочкой $\operatorname{span}\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, можно представить как сумму подпространств $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{\overrightarrow{OA}\}$ и $\mathcal{H}_2 = \operatorname{span}\{\overrightarrow{OB}\}$ (рис. 2.6).

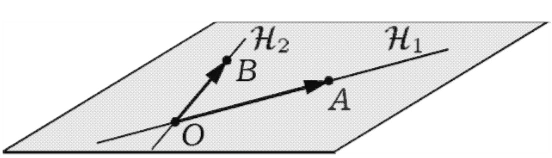


Рис. 2.6

2.3. Прямая сумма линейных подпространств

Определение 2.4. *Сумму* $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ двух *линейных подпространств* $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ данного *линейного пространства* называют ***прямой суммой***, если для каждого *вектора* $\boldsymbol{x}$ из $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ его представление

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_1\in\mathcal{H}_1, \quad \boldsymbol{x}_2\in\mathcal{H}_2,$$

единственно.

Прямую сумму линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ обозначают $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$. Прямая сумма как частный случай суммы линейных подпространств по теореме 2.2 является линейным подпространством.

Пример 2.9. Сумма линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в примере 2.8 является прямой. Действительно, представление произвольного вектора $\overrightarrow{OM}$ в виде $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, где $\overrightarrow{OM_1}\in\mathcal{H}_1$, $\overrightarrow{OM_2}\in\mathcal{H}_2$, равносильно представлению этого вектора в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, так как, согласно определению подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, $\overrightarrow{OM_1}=\lambda_1\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM_2}=\lambda_2\overrightarrow{OB}$ для некоторых чисел λ_1 и λ_2. Но так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ линейно независимы, такое представление единственно.

Теорема 2.3. Для того чтобы сумма $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы *пересечение* этих линейных подпространств было *нулевым подпространством*, т.е. $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2=\{\mathbf{0}\}$.

◀ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть сумма $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ является прямой суммой. Выберем любой вектор $\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$. Тогда $\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ и для него справедливы два представления

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{y}=\mathbf{0}+\boldsymbol{y}, \tag{2.1}$$

в каждом из которых левое слагаемое является элементом линейного подпространства $\mathcal{H}_1$, а правое — $\mathcal{H}_2$. Так как $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ является прямой суммой, то оба представления (2.1) совпадают, т.е. $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. Значит, $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$ содержит единственный вектор $\mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2=\{\mathbf{0}\}$. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}\in\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ и докажем, что любые два его представления

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\qquad \boldsymbol{x}_1\in\mathcal{H}_1,\quad \boldsymbol{x}_2\in\mathcal{H}_2; \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'_1+\boldsymbol{x}'_2,\qquad \boldsymbol{x}'_1\in\mathcal{H}_1,\quad \boldsymbol{x}'_2\in\mathcal{H}_2, \tag{2.3}$$

совпадают.

Вычтем из равенства (2.2) равенство (2.3). В результате получим $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)-(\boldsymbol{x}'_1+\boldsymbol{x}'_2)=\mathbf{0}$, откуда

$$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}'_1=\boldsymbol{x}'_2-\boldsymbol{x}_2.$$

Но тогда, с одной стороны, вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}'_1$ принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}_1$, а с другой — он, согласно представлению $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'_2-\boldsymbol{x}_2$, принадлежит и другому линейному подпространству $\mathcal{H}_2$. Следовательно, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$, а так как $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2=\{\mathbf{0}\}$, то и $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. Поэтому $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}'_1=\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}'_2=\mathbf{0}$, т.е. представления (2.2) и (2.3) совпадают. ►

Пример 2.10. В примере 2.8 линейные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ образуют прямую сумму (см. пример 2.9). Это можно показать следующим образом. Так как прямые пересекаются в единственной точке, то единственный вектор, коллинеарный одновременно обеим прямым, изображающим подпространства, — это нулевой вектор. Значит, $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2=\{\mathbf{0}\}$. Согласно теореме 2.3, эти подпространства образуют прямую сумму.

2.4. Размерность линейного подпространства

Линейное подпространство является *линейным пространством* относительно операций объемлющего линейного пространства и поэтому имеет *размерность* и *базис.*

Теорема 2.4. Если $\mathcal{H}$ — линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$, то $\dim\mathcal{H} \leqslant \dim\mathcal{L}$. Если к тому же $\mathcal{H} \neq \mathcal{L}$, то $\dim\mathcal{H} < \dim\mathcal{L}$.

◄ Любой базис линейного подпространства $\mathcal{H}$, рассматриваемого как линейное пространство, является *линейно независимой системой векторов* в объемлющем линейном пространстве $\mathcal{L}$. Если этот базис из $\mathcal{H}$ является базисом и в $\mathcal{L}$, то, согласно теореме 1.5, $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}$ и ясно, что в этом случае $\mathcal{H} = \mathcal{L}$, так как у них есть общий базис. Если базис из $\mathcal{H}$ не является базисом объемлющего линейного пространства $\mathcal{L}$, то существует такой вектор $x \in \mathcal{L}$, который не является *линейной комбинацией* векторов этого базиса. В этом случае, конечно, линейное подпространство $\mathcal{H}$ не может совпадать с $\mathcal{L}$. Добавив вектор x к векторам базиса, получим линейно независимую систему векторов (см. свойство 4°, с. 27). Это значит, что в $\mathcal{L}$ найдено больше линейно независимых векторов, чем $\dim\mathcal{H}$. Следовательно, согласно определению 1.5 размерности линейного пространства, $\dim\mathcal{H} < \dim\mathcal{L}$. ►

Замечание 2.1. Любой базис *собственного подпространства* $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ можно расширить, добавив вектор так, что расширенная система векторов останется линейно независимой. Если расширенная система опять не является базисом в $\mathcal{L}$, процедуру расширения можно повторить. Для *конечномерного линейного пространства* очередное расширение через какое-то количество шагов станет невозможным, так как количество векторов в линейно независимой системе не может превышать размерности линейного пространства. Максимально расширенная система векторов будет линейно независимой, а любой вектор будет представляться ее линейной комбинацией, т.е. эта система векторов будет базисом в $\mathcal{L}$. Согласно теореме 1.5, количество векторов в этой системе будет равно размерности линейного пространства $\mathcal{L}$.

Приведенное рассуждение показывает, что любой базис собственного линейного подпространства может быть расширен до базиса объемлющего линейного пространства добавлением новых векторов. Например, рассмотрим линейное пространство V_3 с ортонормированным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Линейное подпространство $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ имеет размерность 2, так как его базисом является пара векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Действительно, они линейно независимы, а любой вектор из $\mathcal{H}$ представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ согласно определению этого подпространства. Этот базис можно расширить до базиса в V_3, добавив один вектор. В качестве этого, дополнительного вектора можно взять любой вида $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ с $\gamma \neq 0$.

Теорема 2.5. Если $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$, то

$$\dim(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = \dim\mathcal{H}_1 + \dim\mathcal{H}_2 - \dim(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2).$$

◄ В линейном подпространстве $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ выберем некоторый базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \dots \ \boldsymbol{e}_m)$. Множество $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ является линейным подпространством не только в $\mathcal{L}$, но и в его части $\mathcal{H}_1$. Поэтому выбранный базис можно дополнить некоторой системой векторов $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \ \dots \ \boldsymbol{f}_l)$ до базиса $(\boldsymbol{e} \ \boldsymbol{f})$ в линейном подпространстве $\mathcal{H}_1$. Точно так же систему $\boldsymbol{e}$ можно дополнить некоторым набором векторов $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1 \ \dots \ \boldsymbol{g}_k)$ до базиса $(\boldsymbol{e} \ \boldsymbol{g})$ в $\mathcal{H}_2$. Докажем, что система векторов

$$(\boldsymbol{e} \ \boldsymbol{f} \ \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{e}_1 \ \dots \ \boldsymbol{e}_m \ \boldsymbol{f}_1 \ \dots \ \boldsymbol{f}_l \ \boldsymbol{g}_1 \ \dots \ \boldsymbol{g}_k)$$

является базисом в линейном пространстве $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Во-первых, установим, что указанная система линейно независима. Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m + \beta_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + \beta_l\boldsymbol{f}_l + \gamma_1\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \gamma_k\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{0}. \quad (2.4)$$

Тогда для вектора

$$y = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_l f_l \tag{2.5}$$

выполнено равенство

$$y = -\alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_m e_m - \gamma_1 g_1 - \ldots - \gamma_k g_k. \tag{2.6}$$

Согласно равенству (2.5) заключаем, что $y \in \mathcal{H}_1$, а согласно (2.6) делаем вывод, что $y \in \mathcal{H}_2$. Следовательно, $y \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ и потому имеет единственное разложение

$$y = \delta_1 e_1 + \ldots + \delta_m e_m \tag{2.7}$$

по базису e линейного пространства $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Разложение (2.7) можно рассматривать как разложение по базису $(e\ g)$ в линейном подпространстве $\mathcal{H}_2$. Но тогда разложения (2.6) и (2.7) совпадают как разложения одного и того же вектора в базисе $(e\ g)$. Следовательно, $\gamma_j = 0$, $j = \overline{1, k}$, а все коэффициенты δ_i отличаются от соответствующих коэффициентов α_i лишь знаком. С другой стороны, представление (2.5) вектора y и представление (2.7) того же вектора являются разложениями одного вектора в базисе $(e\ f)$ линейного подпространства $\mathcal{H}_1$ и потому совпадают. Их совпадение означает, что $\beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$ и $\delta_1 = \ldots = \delta_m = 0$. Тогда и $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Таким образом, все коэффициенты произвольно взятой линейной комбинации (2.4), равной нулевому вектору, оказались равными нулю. Значит, система векторов $(e\ f\ g)$ линейно независима.

В-вторых, любой вектор $y \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ есть линейная комбинация системы векторов $(e\ f\ g)$. Действительно, такой вектор представим в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathcal{H}_1$, $y_2 \in \mathcal{H}_2$. Вектор y_1 представляется линейной комбинацией системы векторов $(e\ f)$, а y_2 — линейной комбинацией системы векторов $(e\ g)$. Поэтому y разлагается по системе векторов $(e\ f\ g)$.

Итак, система векторов $(e\ f\ g)$ линейно независима и любой вектор из $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ разлагается по этой системе. Следовательно, $(e\ f\ g)$ — базис в $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Нам остается подсчитать размерности:

Линейное подпространство	базис	размерность
$\mathcal{H}_1$	$(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f})$	$m+l$
$\mathcal{H}_2$	$(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{g})$	$m+k$
$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$	$\boldsymbol{e}$	m
$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$	$(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f}\ \ \boldsymbol{g})$	$m+l+k$

Таким образом, получаем утверждение теоремы. ►

Следствие. $\dim(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{H}_1 + \dim \mathcal{H}_2$.

2.5. Ранг системы векторов

Определение 2.5. ***Рангом системы векторов*** в *линейном пространстве* называют *размерность линейной оболочки* этой *системы векторов*.

Теорема 2.6. Ранг системы векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1\ \dots\ \boldsymbol{a}_k)$ линейного пространства $\mathcal{L}$ равен:

а) максимальному количеству *линейно независимых векторов* в системе $\boldsymbol{a}$;

б) рангу матрицы, составленной по столбцам из *координат векторов* $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ в каком-либо *базисе линейного пространства* $\mathcal{L}$.

◄ Пусть $\boldsymbol{g}$ — некоторый базис в $\mathcal{L}$. Составим по столбцам матрицу A из координат в базисе $\boldsymbol{g}$ векторов $\boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1, k}$. *Линейные операции* над векторами $\boldsymbol{a}_i$ соответствуют таким же линейным операциям над столбцами их координат. Поэтому, согласно следствию 1.1, векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда столбцы их координат линейно независимы. По теореме о базисном миноре [III] ранг матрицы A равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов. Это совпадает с максимальным количеством линейно независимых векторов в системе $\boldsymbol{a}$. Следовательно, утверждения а) и б) теоремы эквивалентны.

Выберем в матрице A какой-либо базисный минор и зафиксируем столбцы этого минора (базисные столбцы). Соответствующие им векторы будем называть базисными. По теореме о базисном миноре, во-первых, базисные столбцы линейно независимы и поэтому базисные векторы образуют линейно независимую систему, а во-вторых, все остальные столбцы матрицы являются линейными комбинациями базисных и поэтому небазисные векторы системы выражаются через базисные. Следовательно, любая линейная комбинация векторов системы $\boldsymbol{a}$ сводится к линейной комбинации системы базисных векторов, т.е. любой вектор линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}$ выражается через базисные векторы. Значит, базисные векторы образуют базис линейной оболочки. Количество базисных векторов, с одной стороны, равно количеству базисных столбцов, т.е. рангу матрицы A, а с другой — совпадает с размерностью линейной оболочки, т.е. с рангом системы векторов $\boldsymbol{a}$. ►

Замечание 2.2. Как следует из приведенного доказательства, столбцы любого базисного минора матрицы A отвечают набору векторов системы $\boldsymbol{a}$, являющемуся базисом в $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}\}$ — линейном подпространстве, порожденном этой системой векторов.

Пример 2.11. Пусть даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ в четырехмерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, имеющие в некотором базисе столбцы координат $a_1 = (1\ \ 2\ \ 0\ \ 6)^{\mathrm{T}}$, $a_2 = (2\ \ 0\ \ 3\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, $a_3 = (3\ \ 2\ \ 3\ \ 7)^{\mathrm{T}}$, $a_4 = (7\ \ 2\ \ 9\ \ 9)^{\mathrm{T}}$. Соответствующая матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислив ранг матрицы, убеждаемся, что он равен 2. Таким образом, ранг системы векторов равен 2. Легко проверить, что любой минор второго порядка является базисным. Поэтому базисом линейной оболочки этой системы векторов будут любые два вектора системы. Например, базисом является пара векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. По этому базису можно разложить, например, остальные векторы системы. Чтобы найти *разложение вектора* $\boldsymbol{a}_3$ *по базису*, достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3,$$

которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 = 2, \\ \phantom{2x_1 + {}} 3x_2 = 3, \\ 6x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Из четырех уравнений можно оставить любые два. Используя второе и третье уравнения, находим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. Аналогично находим и разложение вектора $\boldsymbol{a}_4$: $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$.

2.6. Линейные оболочки и системы уравнений

Пусть $\mathcal{L}$ — *n-мерное линейное пространство*, в котором фиксирован некоторый *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$ и выбраны *векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}$. Запишем *разложение* выбранных *векторов по базису* $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{e}a_j, \quad j = \overline{1,k}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}b,$$

где $a_j = (a_{1j} \ \ldots \ a_{nj})^{\mathrm{т}}$, $j = \overline{1,k}$, $b = (b_1 \ \ldots \ b_n)^{\mathrm{т}}$ — столбцы *координат* соответствующих *векторов*. Пусть A — матрица типа $n\times k$, составленная из координатных столбцов векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$, а $(A|b)$ — матрица, полученная из матрицы A добавлением справа еще одного столбца b.

Для вектора $\boldsymbol{b}$ возможны два случая:

1) вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежит *линейной оболочке* $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$;
2) вектор $\boldsymbol{b}$ не принадлежит $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$.

В первом случае добавление к *системе векторов* $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ вектора $\boldsymbol{b}$ не приводит к расширению линейной оболочки системы и, следовательно,

$$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\}.$$

По теореме 2.6 заключаем, что $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A\,|\,b)$.

Во втором случае, наоборот, добавление вектора $\boldsymbol{b}$ к системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ приводит к расширению линейной оболочки, причем по теореме 2.5

$$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\} + 1,$$

так как

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\} \oplus \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}\}.$$

Следовательно, $\operatorname{Rg}(A\,|\,b) = \operatorname{Rg} A + 1$.

Выясним теперь, что означают эти два случая „на координатном уровне“. В первом случае условие $\boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ означает существование разложения

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b} \tag{2.8}$$

с некоторыми действительными коэффициентами x_1, ..., x_k. Записывая это векторное равенство в координатной форме, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases} \tag{2.9}$$

относительно переменных $x = (x_1 \ \ldots \ x_k)^{\mathrm{T}}$, которая в матричной форме имеет вид $Ax = b$. Существование разложения (2.8) означает, что полученная система имеет решение. Во втором случае представление (2.8) невозможно, т.е. система (2.9) не имеет решений.

Итак, следующие четыре утверждения эквивалентны между собой:

– $\boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$;

– $\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$;

– $\operatorname{Rg}(A\,|\,b) = \operatorname{Rg} A$;

– система $Ax = b$ из n линейных алгебраических уравнений относительно k неизвестных совместна.

Эквивалентность последних двух утверждений составляет содержание теоремы Кронекера — Капелли [III], которая верна для произвольных СЛАУ. Отметим, что любая система из n линейных алгебраических уравнений относительно k неизвестных может быть получена как результат проведенных рассуждений. Для этого достаточно в качестве векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ рассмотреть столбцы коэффициентов при неизвестных, а в качестве вектора $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов. Все эти столбцы могут рассматриваться как n-мерные векторы в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, теорему Кронекера — Капелли можно переформулировать следующим образом: для того чтобы линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ совпадала с линейной оболочкой расширенной системы $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}$, необходимо и достаточно, чтобы были равны размерности этих линейных оболочек.

Предположим, что квадратная СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любом столбце b правых частей. Рассматривая столбцы матрицы A и столбец b как элементы $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}$ n-мерного линейного арифметического пространства и записывая СЛАУ в векторной форме

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

заключаем, что линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ совпадает со всем линейным пространством $\mathbb{R}^n$. Из этого следует, что ранг этой системы векторов равен размерности линейного пространства n, а так как в системе ровно n

векторов, то она, согласно теореме 2.6, линейно независима. Другими словами, столбцы матрицы A линейно независимы, а матрица A является невырожденной (см. теорему о базисном миноре [III]).

Таким образом, если квадратная СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любой правой части, то матрица A системы невырождена, а решение системы при любой правой части единственно.

2.7. Прямое дополнение

Определение 2.6. Если *линейные подпространства* $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ образуют *прямую сумму*, причем $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$, то говорят, что $\mathcal{H}_1$ является ***прямым дополнением*** для $\mathcal{H}_2$.

Если линейное подпространство $\mathcal{H}_2$ является прямым дополнением для линейного подпространства $\mathcal{H}_1$, то верно и обратное: $\mathcal{H}_1$ является прямым дополнением для $\mathcal{H}_2$. Оказывается, что любое линейное подпространство имеет прямое дополнение.

Теорема 2.7. Любое линейное подпространство $\mathcal{H}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ имеет прямое дополнение.

◄ Если линейное подпространство $\mathcal{H}$ совпадает со всем линейным пространством $\mathcal{L}$, то в качестве его прямого дополнения следует взять другое *несобственное подпространство*: $\mathcal{H}_1 = \{\mathbf{0}\}$. Точно так же прямым дополнением к нулевому подпространству $\{\mathbf{0}\}$ является само линейное пространство $\mathcal{L}$. Опуская эти два тривиальных случая, полагаем, что линейное *подпространство* $\mathcal{H}$ является *собственным*.

Выберем в $\mathcal{H}$ какой-либо *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_k)$ и дополним его (см. замечание 2.1) *системой векторов* $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}_m)$ до базиса $(\boldsymbol{e} \ \boldsymbol{f})$ в $\mathcal{L}$. Положим $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}\}$. Тогда $\mathcal{H} + \mathcal{H}_1 = \mathcal{L}$, так как сумма $\mathcal{H} + \mathcal{H}_1$ содержит все векторы системы $(\boldsymbol{e} \ \boldsymbol{f})$, являющейся базисом в $\mathcal{L}$, а значит, и любой другой вектор линейного пространства. Остается доказать, что сумма $\mathcal{H}+\mathcal{H}_1$ является прямой.

Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}\cap\mathcal{H}_1$. Тогда, с одной стороны, $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{e}_k$, так как $\boldsymbol{y}$ принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}$, а с другой стороны, $\boldsymbol{y}=\beta_1\boldsymbol{f}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{f}_m$, так как $\boldsymbol{y}$ принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}_1$. Эти две линейные комбинации есть два разложения вектора в базисе $(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f})$ линейного пространства $\mathcal{L}$ и, следовательно, должны совпадать:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{e}_k=\beta_1\boldsymbol{f}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{f}_m,$$

или

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{e}_k-\beta_1\boldsymbol{f}_1-\ldots-\beta_m\boldsymbol{f}_m=\mathbf{0}.$$

Система векторов $(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f})$ *линейно независима*, так как является базисом. Поэтому из последнего равенства векторов следует, что в нем все коэффициенты нулевые. Значит, *вектор* $\boldsymbol{y}$ является *нулевым*, а так как он выбирался произвольно, то $\mathcal{H}\cap\mathcal{H}_1=\{\mathbf{0}\}$. Поэтому линейные подпространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ образуют прямую сумму (см. теорему 2.3). ►

Вопросы и задачи

2.1. Может ли линейное подпространство состоять из: а) двух элементов; б) одного элемента; г) 100 элементов?

2.2. Может ли линейное подпространство конечномерного линейного пространства быть бесконечномерным?

2.3. Докажите, что бесконечномерное линейное пространство содержит собственные бесконечномерные линейные подпространства.

2.4. По аналогии с суммой двух линейных подпространств определите сумму конечного числа линейных подпространств.

2.5. Пусть для линейных подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ некоторого линейного пространства $\mathcal{L}$ выполняется равенство $\dim(\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2)=\dim\mathcal{H}_1+\dim\mathcal{H}_2$. Что можно утверждать о линейном пространстве: а) $\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$; б) $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$?

2.6. Найдите максимальное число линейно независимых векторов в системе векторов, заданных своими координатами

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$$

в некотором базисе линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности 4.

2.7. Докажите, что линейным подпространством является множество всех векторов n-мерного линейного арифметического пространства, удовлетворяющих условию:

а) первые две координаты равны между собой;

б) первая координата равна нулю;

в) координаты удовлетворяют уравнению $x_1+2x_2+2^2x_3+ +\ldots+2^{n-1}x_n=0$.

Найдите базис и размерность этого линейного подпространства.

2.8. Найдите размерность и базис линейной оболочки следующих векторов из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1=(1,\ -1,\ 1,\ 1),\qquad \boldsymbol{a}_2=(2,\ 3,\ 1,\ 2),\qquad \boldsymbol{a}_3=(4,\ 1,\ 3,\ 4).$$

2.9. В линейном пространстве $\mathcal{L}$, $\dim\mathcal{L}=4$, две системы векторов $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3)$ и $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1\ \ \boldsymbol{f}_2\ \ \boldsymbol{f}_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе:

$$e_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\qquad e_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

и

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Какова размерность пересечения линейных подпространств $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}\}$ и $\operatorname{span}\{\boldsymbol{f}\}$?

2.10. Найдите размерность и базис линейного подпространства в $\mathbb{R}^4$, состоящего из решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

2.11. Докажите, что в линейном пространстве квадратных матриц порядка n линейные подпространства симметрических и кососимметрических матриц можно рассматривать как прямые дополнения друг друга.

2.12. В линейном пространстве квадратных матриц порядка n найдите размерность и базис пересечения линейных подпространств верхних треугольных и нижних треугольных матриц.

2.13. Докажите, что множество трехдиагональных матриц порядка n является линейным пространством относительно линейных матричных операций. Найти размерность и базис этого линейного пространства.

2.14. В шестимерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ даны два линейных подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ размерностей 3 и 4 соответственно. Что можно утверждать о размерности пересечения этих линейных подпространств? При выполнении какого условия справедливо равенство $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$? Может ли сумма $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ быть прямой?

2.15. Сколько прямых дополнений имеет двумерное линейное подпространство в трехмерном линейном пространстве?

3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Определение евклидова пространства

В *линейном пространстве свободных векторов* V_3 кроме *линейных операций* рассматривались и другие. Были введены две операции умножения векторов (скалярное и векторное), для вектора использовалась такая естественная характеристика, как длина (модуль). Взаимное расположение векторов можно было оценивать с помощью угла между ними [III].

Понятие скалярного произведения вводилось исходя из геометрических свойств свободных векторов (длины и угла между векторами). В произвольном линейном пространстве этих свойств пока нет, и поэтому мы не можем ввести скалярное произведение аналогичным способом. Однако такое произведение можно определить исходя из алгебраических свойств, которые были установлены для пространства V_3.

Определение 3.1. Линейное пространство $\mathcal{E}$ называют ***евклидовым пространством***, если в этом пространстве задано ***скалярное умножение***, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое ***скалярным произведением***. При этом выполняются следующие ***аксиомы скалярного умножения***:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;

в) $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

г) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ лишь в случае, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Скалярное произведение часто обозначают так же, как и произведение чисел, т.е. вместо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ пишут $\boldsymbol{xy}$. Скалярное произведение вектора на себя называют ***скалярным квадратом*** (по аналогии с квадратом числа).

Пример 3.1. В линейном пространстве V_3 было введено скалярное умножение согласно правилу

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cos(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}),$$

где $\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ — их длины. Это умножение удовлетворяет приведенным аксиомам скалярного умножения [III] и, следовательно, полностью согласуется с определением 3.1. Таким образом, линейное пространство V_3 относительно указанной операции является евклидовым пространством.

Пример 3.2. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ формула $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ вводит скалярное умножение, поскольку выполняются аксиомы скалярного умножения. Указанное скалярное умножение векторов из $\mathbb{R}^n$ иногда называют ***стандартным***, а само $\mathbb{R}^n$ — ***евклидовым арифметическим пространством.***

Пример 3.3. В произвольном *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ всегда можно ввести скалярное произведение, причем различными способами. Выберем в этом пространстве некоторый *базис* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Для произвольных векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$ положим

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Нетрудно убедиться, что аксиомы скалярного умножения выполняются, т.е. n-мерное линейное пространство становится евклидовым. Отметим, что разным базисам будут соответствовать, вообще говоря, разные операции скалярного умножения.

Задание скалярного произведения через *координаты векторов* в некотором базисе можно рассматривать как обобщение стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$: компоненты

$x_1, \ldots, x_n$ вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ являются координатами этого вектора относительно *стандартного базиса* в линейном арифметическом пространстве.

Пример 3.4. Линейное пространство $C[0, 1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, тоже становится евклидовым, если в нем ввести скалярное умножение

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Убедимся, используя свойства определенного интеграла [VI], что эта операция — действительно скалярное умножение.

Аксиома а):

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx = (g, f)\,.$$

Аксиома б):

$$(f_1 + f_2, g) = \int\limits_0^1 \bigl(f_1(x) + f_2(x)\bigr)g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 f_1(x)g(x)\,dx + \int\limits_0^1 f_2(x)g(x)\,dx = (f_1, g) + (f_2, g)\,.$$

Аксиома в):

$$(\lambda f, g) = \int\limits_0^1 \bigl(\lambda f(x)\bigr)g(x)\,dx = \lambda \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \lambda(f, g)\,.$$

Аксиома г):

$$(f, f) = \int\limits_0^1 f(x)f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Из свойств непрерывных функций следует, что последнее неравенство превращается в равенство только в случае, когда $f(x) \equiv 0$. #

Непосредственно из аксиом скалярного умножения следует ряд его простейших свойств. Далее $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — произвольные векторы евклидова пространства, а λ — действительное число.

Свойство 3.1. $(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

◀ Это свойство аналогично аксиоме в) скалярного умножения и вытекает из равенств

$$(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

которые выполнены в силу этой аксиомы и коммутативности скалярного умножения (аксиома а)). ▶

Свойство 3.2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.

◀ Это свойство аналогично аксиоме б) и следует из равенств

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}),$$

которые выполнены в силу этой аксиомы и коммутативности скалярного умножения. ▶

Свойство 3.3. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$.

◀ Утверждение следует из свойства 3.1:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, 0 \cdot \boldsymbol{0}) = 0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0. \qquad ▶$$

Свойство 3.4. $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k (\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y})$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$.

◀ Утверждение является обобщением аксиом б) и в) и выражает собой многократное применение этих аксиом. Доказательство базируется на *методе математической индукции*, который проводится по количеству m слагаемых в формуле. При

$m=1$ формула совпадает с аксиомой в) скалярного умножения. Пусть формула верна для некоторого значения m. Тогда

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k\boldsymbol{x}_k,\,y\Bigr)&=\Bigl(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\boldsymbol{x}_k+\alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\,y\Bigr)=\\ &=\boxed{\text{аксиома б)}}=\Bigl(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\boldsymbol{x}_k,\,y\Bigr)+(\alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\,y)=\\ &=\boxed{\begin{array}{l}\text{предположение}\\ \text{математической}\\ \text{индукции}\end{array}}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\,y)+(\alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\,y)=\\ &=\boxed{\text{аксиома в)}}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\,y)+\alpha_{m+1}\,(\boldsymbol{x}_{m+1},\,y)=\\ &=\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\,y).\end{aligned}$$ ►

Свойство 3.5. Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ таковы, что для любого $\boldsymbol{z}\in\mathcal{E}$ выполнено равенство $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, то эти векторы совпадают: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

◄ Это свойство не является достаточно очевидным и интуитивно понятным, но играет важную роль в некоторых доказательствах. Чтобы доказать это свойство, преобразуем равенство $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ в форму $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0$, воспользовавшись аксиомой б). Полученное равенство верно для любого вектора $\boldsymbol{z}$, в частности, оно верно для вектора $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0$. Последнее же равенство, согласно аксиоме г), может выполняться только в случае, когда $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. ►

3.2. Неравенство Коши — Буняковского

Теорема 3.1. *Для любых векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ справедливо ***неравенство Коши — Буняковского***

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}). \qquad (3.1)$$

◀ При $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ обе части неравенства (3.1) равны нулю согласно свойству 3.3, значит, неравенство выполняется. Отбрасывая этот очевидный случай, будем считать, что $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Для любого действительного числа λ, в силу аксиомы г), выполняется неравенство

$$(\lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя *аксиомы* и свойства *скалярного умножения*:

$$(\lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \lambda (\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) =$$
$$= \lambda^2 (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно параметра λ (коэффициент $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ при λ^2 согласно аксиоме г) ненулевой, так как $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$), неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqslant 0. \qquad ▶$$

Пример 3.5. Доказательство неравенства Коши — Буняковского выглядит достаточно просто. Тем не менее это неравенство очень полезное. Применяя его в конкретных евклидовых пространствах, мы получаем некоторые хорошо известные в анализе и алгебре неравенства.

В случае *линейного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ неравенство Коши — Буняковского трансформируется в ***неравенство Коши***:

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

В евклидовом пространстве $C[0, 1]$, скалярное произведение в котором выражается определенным интегралом (см. пример 3.4), неравенство Коши — Буняковского превращается в

неравенство Буняковского (называемое также ***неравенством Шварца***):

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

3.3. Нормированные пространства

В *линейном пространстве* обобщением понятия длины *свободного вектора* является норма. Длину вектора в линейном пространстве V_3 или V_2 можно рассматривать как функцию, определенную на множестве V_3 (соответственно V_2), которая каждому вектору ставит в соответствие число — его длину. Эта функция обладает некоторыми характерными свойствами [III], которые и служат основой для определения нормы в линейном пространстве. Норму вектора в линейном пространстве иногда называют длиной, имея в виду связь с аналогичным термином векторной алгебры.

Определение 3.2. Функцию, заданную на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|\boldsymbol{x}\|$, называют ***нормой***, если она удовлетворяет следующим ***аксиомам нормы***:

а) $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$, причем равенство $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ возможно только при $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

б) $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

в) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

Определение 3.3. Линейное пространство, в котором задана норма, называют ***нормированным пространством***.

Евклидовы пространства и нормированные пространства представляют собой примеры линейных пространств с дополнительными структурами: *скалярным умножением* и нормой соответственно. Эти два понятия совершенно различны, однако, как утверждает следующая теорема, исходя из скалярного умножения в евклидовом пространстве можно задать норму и тем самым превратить евклидово пространство в нормированное.

Теорема 3.2. Всякое скалярное умножение в евклидовом пространстве определяет норму согласно формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}. \tag{3.3}$$

◄ Отметим, что, согласно аксиоме г) скалярного умножения, $(x,x) \geqslant 0$ и, следовательно, функция, заданная соотношением (3.3), определена для всех векторов x евклидова пространства. Проверим выполнение аксиом нормы. Аксиома а) нормы немедленно следует из аксиомы г) скалярного умножения (определение 3.1). Аксиома б) нормы вытекает из аксиомы в) скалярного умножения и свойства 3.1:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\, \|x\|.$$

Остается проверить аксиому в) нормы, для чего мы воспользуемся *неравенством Коши — Буняковского* (3.1), которое можно записать в виде

$$(x,y) \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$$

или, с учетом (3.3),

$$(x,y) \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \\ &= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant \\ &\leqslant (x,x) + 2\,\|x\|\,\|y\| + (y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$ ►

Введение нормы по формуле (3.3) опирается только на общие свойства скалярного умножения, вытекающие из его аксиом, и не связано со спецификой конкретного линейного пространства. Поэтому такую норму в евклидовом пространстве называют ***евклидовой*** или ***сферической нормой.*** Когда говорят, не уточняя, о норме в евклидовом пространстве, обычно имеют в виду именно эту норму.

Вовсе не обязательно, чтобы в евклидовом пространстве норма вводилась через скалярное произведение. Рассмотрим следующие примеры, показывающие другие часто используемые нормы, не связанные с каким-либо скалярным произведением.

Пример 3.6. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ нормой является функция $\|\cdot\|_1$ вида

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

($|\cdot|$ в правой части обозначает модуль действительного числа).

Легко убедиться, что аксиома а) нормы выполнена, так как величина $|x_1| + \ldots + |x_n|$ всегда неотрицательна, причем она равна нулю тогда и только тогда, когда все компоненты x_i арифметического вектора равны нулю.

Так же просто убедиться в верности аксиомы б) нормы. Для проверки неравенства треугольника (аксиома в) нормы) выберем произвольные два вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \|(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\|_1 &= \\ &= |x_1+y_1| + \ldots + |x_n+y_n| \leqslant \\ &\leqslant |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.\end{aligned}$$

Приведенную норму называют l_1***-нормой*** или ***октаэдрической нормой.***

Пример 3.7. Функция

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

заданная на векторах $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ в $\mathbb{R}^n$, также является нормой в $\mathbb{R}^n$. Эту норму называют ***l_∞-нормой*** или ***кубической нормой***.

Как и в предыдущем примере проверка аксиом а) и б) нормы очевидна. Проверим неравенство треугольника для произвольных векторов $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty &= \|(x_1+y_1,\ \ldots,\ x_n+y_n)\|_\infty = \\ &= \max\{|x_1+y_1|,\ldots,|x_n+y_n|\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{|x_1|+|y_1|,\ldots,|x_n|+|y_n|\} \leqslant \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} + \\ &+ \max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty. \quad \#\end{aligned}$$

Нормы $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{x}\|_1$ одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ связаны неравенствами

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

которые непосредственно вытекают из определений этих норм.

Пример 3.8. Множество S тех векторов $\boldsymbol{x}$ нормированного пространства, которые удовлетворяют равенству $\|\boldsymbol{x}\|=1$ (***единичных векторов***), называют ***единичной сферой***. Множество S зависит от линейного пространства и однозначно определяет рассматриваемую в нем норму. На рис. 3.1 изображен вид единичной сферы для различных норм двумерного линейного пространства (конкретно линейного пространства радиус-векторов точек плоскости): евклидовой (рис. 3.1, *а*), октаэдрической (рис. 3.1, *б*) и кубической (рис. 3.1, *в*). В случае трехмерного линейного пространства (линейного пространства радиус-векторов) единичные сферы указанных норм изображены на рис. 3.2. Мы видим, что это сфера (рис. 3.2, *а*), октаэдр (рис. 3.2, *б*) и куб (рис. 3.2, *в*). Вид единичной сферы для этих норм и послужил источником для их названий.

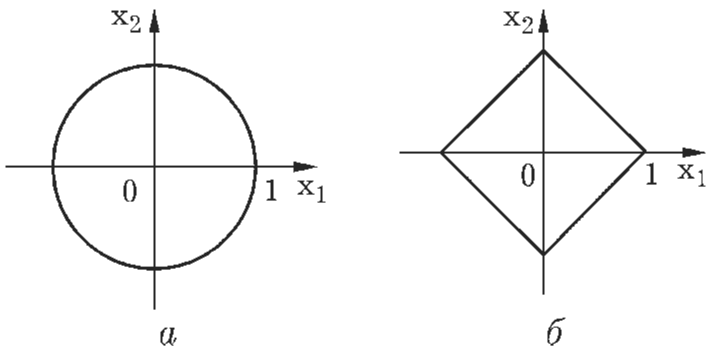


Рис. 3.1

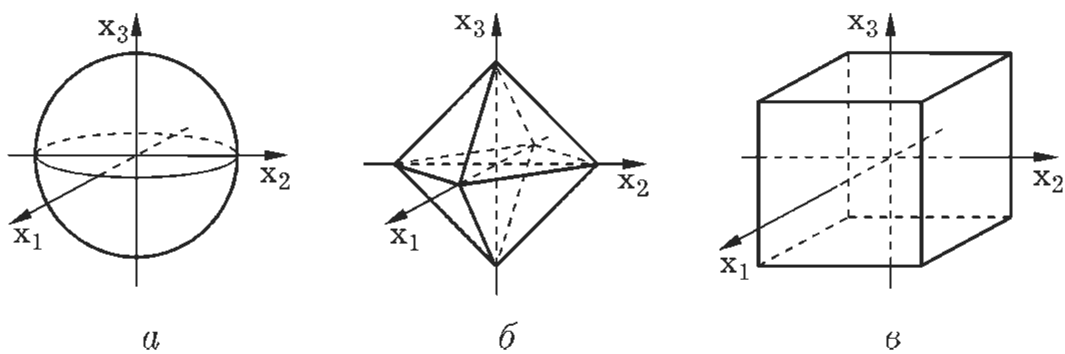


Рис. 3.2

3.4. Угол между векторами

Понятие угла между *свободными векторами* в пространствах V_2 и V_3 обобщается на любое *евклидово пространство*. Однако если в пространствах свободных векторов определение *скалярного произведения* базировалось на угле между векторами, то в произвольном евклидовом пространстве наоборот, аксиоматически заданное скалярное произведение позволяет определить угол.

Определение 3.4. ***Углом*** φ ***между*** *ненулевыми* ***векторами*** $\boldsymbol{x}$ **и** $\boldsymbol{y}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называют значение φ на отрезке от 0 до π, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\,|} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}}. \tag{3.4}$$

Согласно *неравенству Коши — Буняковского* (3.1) правая часть в (3.4) по модулю не превосходит 1 и потому является косинусом некоторого действительного числа. Следовательно, угол φ определен корректно для любой пары ненулевых векторов.

Равенство (3.4) не имеет смысла, если один из векторов нулевой. В этом случае угол между векторами не определен, и мы будем приписывать ему то значение, которое наиболее удобно в конкретной ситуации (то же соглашение действует и в пространствах свободных векторов, [III]).

Пример 3.9. В $\mathbb{R}^4$ со *стандартным скалярным умножением* угол φ между векторами $x = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$ и $y = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$ равен $\pi/3$, поскольку в соответствии с (3.4)

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично в евклидовом пространстве $C[0, 1]$ (см. пример 3.4) угол φ между функциями $f(x) = 2$ и $g(x) = 2x - 1$ равен $\pi/2$, так как

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int\limits_0^1 2(2x-1)\,dx = 2(x^2 - x)\Big|_0^1 = 0$$

и в соответствии с (3.4) $\cos\varphi = 0$.

3.5. Ортогональные системы векторов

Определение 3.5. Два вектора в *евклидовом пространстве* называют ***ортогональными***, если их *скалярное произведение* равно нулю.

Ортогональность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем обозначать так: $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Отметим, что, согласно свойству 3.3 скалярного умножения, *нулевой вектор* ортогонален любому другому.

Евклидово пространство — это, согласно определению 3.1, частный случай *линейного пространства*, и поэтому можно говорить о его *линейных подпространствах* в смысле определения 2.1. Каждое из таких линейных подпространств является евклидовым пространством относительно скалярного умножения, заданного в объемлющем евклидовом пространстве.

Говорят, что вектор $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ ***ортогонален подпространству*** $\mathcal{H}$, и обозначают $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{H}$, если он ортогонален каждому вектору этого подпространства.

Если $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$, то условие $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{H}$ равносильно тому, что вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален каждому вектору $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Действительно, если $\boldsymbol{x}$ ортогонален $\mathcal{H}$, то, согласно определению, он ортогонален и каждому вектору $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Докажем противоположное утверждение. Пусть $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1, k}$, и $\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$. Тогда вектор $\boldsymbol{y}$ является *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_i$:

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k,$$

и поэтому, согласно свойству 3.4,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha_1 (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) + \ldots + \alpha_k (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k) = 0.$$

В частности, если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}$ ортогональны, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\boldsymbol{x}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ тоже ортогональны:

$$(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0.$$

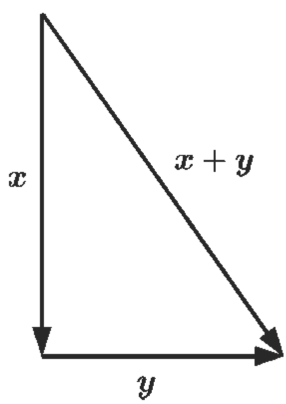


Рис. 3.3

В пространстве V_3 *ненулевым* ортогональным *векторам* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно сопоставить катеты прямоугольного треугольника, причем так, что их сумме, построенной по правилу треугольника, будет соответствовать гипотенуза этого прямоугольного треугольника (рис. 3.3). По аналогии с V_3 мы назовем в евклидовом пространстве сумму $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ ортогональных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ гипотенузой треугольника, построенного на $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Тогда на произвольное евклидово пространство распространяется известная ***теорема Пифагора***.

Теорема 3.3. Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из евклидова пространства ортогональны, то

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 .$$

◀ Здесь под *нормой* мы, как обычно, понимаем *евклидову норму*. Выразим левую часть этого равенства через скалярное произведение и воспользуемся условием ортогональности $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \\ = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 . \quad ▶$$

Определение 3.6. *Систему векторов* евклидова пространства называют ***ортогональной***, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Следующее свойство ортогональной системы является самым важным.

Теорема 3.4. Любая ортогональная *система* ненулевых *векторов линейно независима*.

◀ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выполняется равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}. \tag{3.5}$$

Умножим это равенство скалярно на какой-либо вектор $\boldsymbol{e}_i$:

$$(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_i\boldsymbol{e}_i + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_i).$$

В силу свойства 3.3 скалярного произведения правая часть полученного равенства равна нулю, и мы, преобразуя левую часть в соответствии со свойством 3.4, получаем

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \ldots + \alpha_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + \ldots + \alpha_m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = 0.$$

Так как система векторов ортогональна, то все слагаемые слева, кроме одного, равны нулю, т.е.

$$\alpha_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0. \tag{3.6}$$

Так как вектор $\mathbf{e}_i$ ненулевой, то $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \neq 0$ (*аксиома* г) *скалярного умножения*). Поэтому из (3.6) следует, что $\alpha_i = 0$. Индекс i можно было выбирать произвольно, так что на самом деле все коэффициенты α_i являются нулевыми. Мы доказали, что равенство (3.5) возможно лишь при нулевых коэффициентах, а это, согласно определению 1.2, означает, что система векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ линейно независима. ►

Пример 3.10. В евклидовом пространстве $C[0, \pi]$ система функций $\cos kx$, $k = \overline{1, n}$, является ортогональной, поскольку

$$(\cos kx, \cos lx) = \int\limits_0^\pi \cos kx \cos lx \, dx = 0$$

при $k, l = \overline{1, n}$, $k \neq l$.

3.6. Ортогональные и ортонормированные базисы

Евклидово пространство является *линейным пространством*. Поэтому правомерно говорить о его *размерности* и его *базисах*. Как и произвольные линейные пространства, евклидовы пространства можно разделить на *бесконечномерные* и *конечномерные*.

Если базис евклидова пространства представляет собой *ортогональную систему векторов*, то этот базис называют ***ортогональным***. В силу теоремы 3.4 любая ортогональная *система* ненулевых *векторов линейно независима*, и если она в n-мерном евклидовом пространстве состоит из n векторов, то является базисом.

В линейном пространстве все базисы равноправны. В евклидовом же пространстве наличие *скалярного умножения* позволяет выделить среди всех базисов ортогональные и ортонормированные, которые более удобны и играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли *прямоугольной системы координат* в аналитической геометрии.

Определение 3.7. Ортогональный базис называют ***ортонормированным***, если каждый вектор этого базиса имеет *норму* (*длину*), равную единице.

Дополнительное требование к нормам векторов в ортонормированном базисе в принципе не является существенным, так как любой ортогональный базис легко преобразовать в ортонормированный, умножая векторы на соответствующие нормирующие коэффициенты (разделив каждый вектор базиса на его длину). Однако дополнительная нормировка векторов упрощает изложение теории.

Пример 3.11. Система из трех векторов $\boldsymbol{a} = (1,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{b} = (1,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{c} = (0,\ 1,\ 0)$ в *евклидовом арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^3$ образует ортогональный базис, потому что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Этот базис не является ортонормированным, так как, например, $\|a\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Чтобы этот базис сделать ортонормированным, нужно векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разделить на их нормы, т.е. на число $\sqrt{2}$.

Пример 3.12. Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_2 свободных векторов на плоскости. Точно так же векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_3.

3.7. Вычисления в ортонормированном базисе

Использование *ортонормированных базисов* облегчает вычисление *скалярного произведения* по *координатам векторов*. Пусть в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ задан некоторый базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в этом пространстве. Эти векторы представляются в базисе $\boldsymbol{e}$ своими координатами:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n.$$

Запишем эти *разложения векторов по базису* в матричной форме:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ может быть выражено через скалярные произведения векторов базиса:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{e}_j\Bigr) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j).$$

Составив из скалярных произведений базисных векторов квадратную матрицу $\Gamma = \bigl((\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\bigr)$ порядка n, мы можем записать скалярное произведение заданных векторов в матричной форме:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}\Gamma y.$$

Матрица Γ является симметрической в силу коммутативности операции скалярного умножения. Ее называют ***матрицей Грама*** системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Пусть базис $\boldsymbol{e}$ является ортонормированным. Тогда скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ при несовпадающих i и j равно нулю, а скалярные квадраты базисных векторов равны $\boldsymbol{e}_i^2 = \|\boldsymbol{e}_i\|^2 = 1$. Это значит, что для ортонормированного базиса матрица Γ является единичной. Поэтому

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}} E y = x^{\mathrm{T}} y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

В частности, в ортонормированном базисе *норма* вектора $\boldsymbol{x}$, которая выражается через скалярный квадрат этого вектора, может быть вычислена по формуле

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x}, \tag{3.7}$$

а для косинуса *угла* φ *между* ненулевыми *векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ получаем выражение

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{3.8}$$

В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ также упрощается вычисление координат вектора: они выражаются через скалярные произведения. Если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, то, умножив равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_i$, находим, что

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример 3.13. В евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдем угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-1,\ 1,\ 0,\ 2)$ и $\boldsymbol{b} = (2,\ -1,\ 1,\ 0)$. Согласно формуле (3.8),

$$\cos\varphi = \frac{(-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}.$$

3.8. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

В каждом ли *евклидовом пространстве* существует *ортонормированный базис*? Непосредственно из определения ответ на этот вопрос получить нельзя. Кроме того, формального ответа на вопрос не достаточно, нужно уметь находить и строить такие базисы.

Ответ на поставленный вопрос утвердительный, а построить ортонормированный базис можно, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, при помощи алгоритма, который называют ***процессом ортогонализации Грама — Шмидта.*** Изложим этот алгоритм.

Пусть $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \;\ldots\; \boldsymbol{f}_n)$ — некоторый базис в *n-мерном* евклидовом *пространстве* $\mathcal{E}$. Модифицируя этот базис, мы будем строить новый базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \;\ldots\; \boldsymbol{e}_n)$, который будет ортонормированным. Последовательно вычисляем векторы $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ и $\boldsymbol{e}_2$ и т.д. по формулам:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1, && \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|};\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1, && \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|};\\
&\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2, && \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\\
&\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - \ldots - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1}, && \boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{g}_n}{\|\boldsymbol{g}_n\|}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Геометрическая иллюстрация этой последовательности вычислений при $n = 3$ (линейное пространство V_3) приведена на рис. 3.4.

Для обоснования алгоритма нужно показать, что ни один из последовательно вычисляемых векторов $\boldsymbol{g}_i$ не является *нулевым вектором* (иначе процесс оборвался бы преждевременно) и что все векторы $\boldsymbol{g}_i$, $i = \overline{1, n}$, попарно *ортогональны.* Тогда и векторы $\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, образуют ортогональную систему, но при этом *норма* каждого из этих векторов равна единице. Ортогональная *система* из n ненулевых *векторов*, согласно теореме 3.4, *линейно независима* и поэтому в n-мерном евклидовом пространстве является базисом.

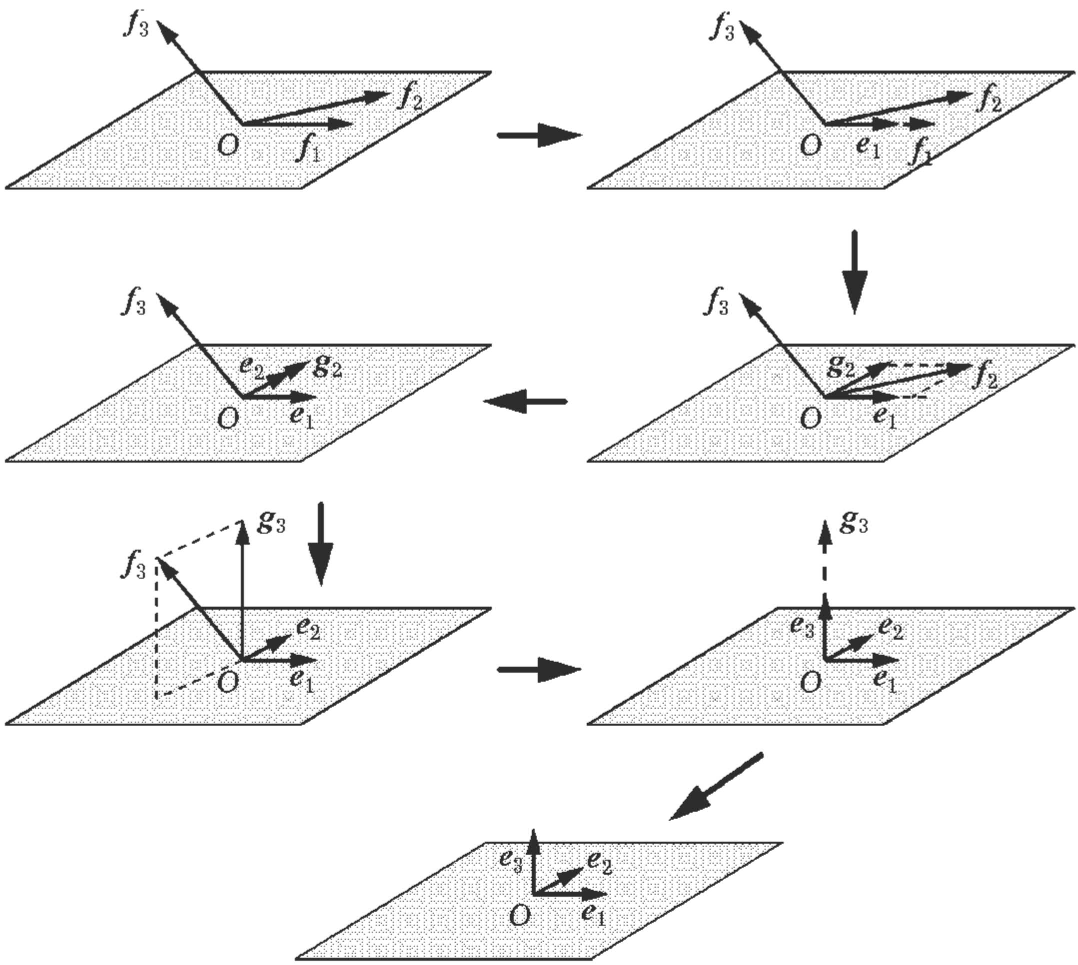


Рис. 3.4

Доказательство опирается на метод математической индукции. В соответствии с этим методом мы будем доказывать, что для любого k, $k = \overline{1, n}$, векторы $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_k$ образуют ортогональную систему и длины их равны единице. Это утверждение очевидно при $k = 1$, так как в этом случае вектор $\boldsymbol{g}_1$ ненулевой, потому что равен вектору $\boldsymbol{f}_1/\|\boldsymbol{f}_1\|$ единичной длины, а систему векторов, состоящую из одного вектора, считают ортогональной по определению.

Пусть векторы $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_k$ образуют ортогональную систему. Вычислим новый вектор $\boldsymbol{g}_{k+1}$ по формуле

$$\boldsymbol{g}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - \ldots - (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_k)\,\boldsymbol{e}_k. \qquad (3.10)$$

Предположив, что $\boldsymbol{g}_{k+1} = \mathbf{0}$, заключаем, что

$$\boldsymbol{f}_{k+1} = (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_k)\,\boldsymbol{e}_k,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{f}_{k+1}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_k$, которые в силу (3.9) выражаются через векторы $\boldsymbol{f}_1$, ..., $\boldsymbol{f}_k$. Следовательно, этот вектор является *линейной комбинацией* системы векторов $\boldsymbol{f}_1$, ..., $\boldsymbol{f}_k$, а система векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{f}_{k+1}$, согласно теореме 1.1, *линейно зависима*. Но это противоречит условию линейной независимости системы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ (свойство 2°, с. 26).

Итак, предположение о том, что $\boldsymbol{g}_{k+1} = \mathbf{0}$, привело к противоречию и потому неверно. Нам остается убедиться, что вектор $\boldsymbol{g}_{k+1}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Умножим равенство (3.10) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_i$, где $i \leqslant k$. Учитывая, что векторы $\boldsymbol{e}_j$ попарно ортогональны при $j \leqslant k$, получим:

$$(\boldsymbol{g}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i)\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = \\ = (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{f}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i) = 0,$$

так как $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}$, где $\boldsymbol{e}_{k+1} = \boldsymbol{g}_{k+1}/\|\boldsymbol{g}_{k+1}\|$, образуют ортогональную систему векторов и имеют единичную длину.

Мы полностью обосновали процесс Грама — Шмидта. Как следствие можем сформулировать следующий теоретический результат.

Теорема 3.5. В *конечномерном* евклидовом *пространстве* существует ортонормированный базис.

При практических применениях процесс Грама — Шмидта удобно модифицировать так, чтобы ограничиться вычислением векторов $\boldsymbol{g}_i$ и не использовать их нормированные варианты $\boldsymbol{e}_i$. В этом случае нужно последовательно вычислить векторы $\boldsymbol{g}_1$, ..., $\boldsymbol{g}_n$, а затем провести их нормировку, приводящую к векторам $\boldsymbol{e}_i$. Чтобы модифицировать алгоритм вычислений, в левой колонке (3.9) заменим векторы $\boldsymbol{e}_i$ на $\boldsymbol{g}_i$ согласно формулам в правой колонке. Получим:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1,\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1,\\
&\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{g}_2\|^2}\boldsymbol{g}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - \frac{(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{g}_2\|^2}\boldsymbol{g}_2 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{g}_{n-1})}{\|\boldsymbol{g}_{n-1}\|^2}\boldsymbol{g}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Пример 3.14. В линейном пространстве V_2 рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ с длинами $|\boldsymbol{a}_1| = 2$, $|\boldsymbol{a}_2| = 6$ и углом между ними $\varphi = \pi/3$. Так как векторы ненулевые, а угол между ними не равен 0 или π, они неколлинеарны, а потому образуют базис в V_2. Построим при помощи процесса Грама — Шмидта ортонормированный базис. Согласно описанному выше алгоритму находим:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_1,\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)}{|\boldsymbol{a}_1|^2}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{6\cdot 2\cdot \frac{1}{2}}{4}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1.
\end{aligned}$$

Затем полученные векторы $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$ нормируем:

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{g}_1| = |\boldsymbol{a}_1| = 2, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{|\boldsymbol{g}_1|} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1,\\
&|\boldsymbol{g}_2|^2 = \left|\boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1\right|^2 = \left(\boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1\right) =\\
&\qquad = |\boldsymbol{a}_2|^2 - 3(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \frac{9}{4}|\boldsymbol{a}_1|^2 = 6^2 - 3\cdot 6\cdot 2\cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4}\cdot 2^2 = 27,\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{|\boldsymbol{g}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_1.
\end{aligned}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и построенный по ним ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ представлены на рис. 3.5.

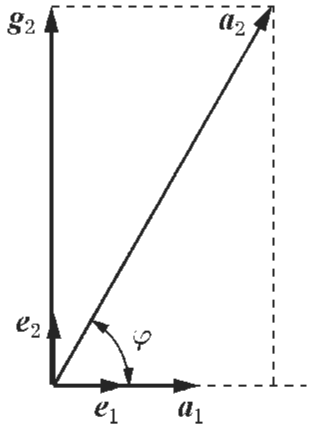


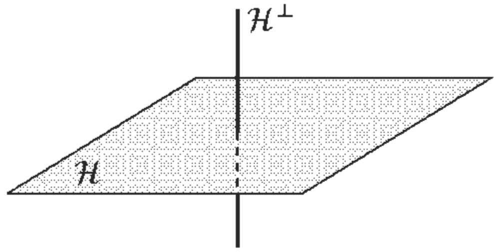
Рис. 3.5

3.9. Ортогональное дополнение

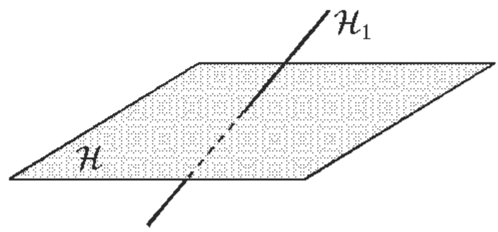
Как следует из теоремы 2.7, в произвольном *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ любое *линейное подпространство* $\mathcal{H}$ имеет *прямое дополнение*, т.е. такое линейное подпространство $\mathcal{H}'$, что $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' = \mathcal{L}$. Такое линейное подпространство $\mathcal{H}'$ не является единственным. Однако в случае *евклидова пространства* среди всех возможных прямых дополнений к данному линейному подпространству одно выделяется.

Определение 3.8. ***Ортогональным дополнением*** линейного подпространства $\mathcal{H}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называют множество $\mathcal{H}^{\perp}$ всех *векторов* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$, *ортогональных* каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{H}$.

Пример 3.15. В евклидовом пространстве V_3 *свободных векторов* рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{H}$ векторов, параллельных данной плоскости (см. пример 2.1). Тогда ортогональным дополнением $\mathcal{H}^{\perp}$ будет множество векторов, перпендикулярных к этой плоскости (рис. 3.6, *а*), в то время как в качестве прямого дополнения $\mathcal{H}_1$ можно взять подпространство векторов, коллинеарных произвольной прямой, пересекающей плоскость в единственной точке, т.е. не параллельной плоскости и не лежащей в этой плоскости (рис. 3.6, *б*). Отметим, что в данном случае $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством в V_3.



а



б

Рис. 3.6

Теорема 3.6. Ортогональное дополнение $\mathcal{H}^{\perp}$ линейного подпространства $\mathcal{H}$ в евклидовом подпространстве $\mathcal{E}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$, причем $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$ и $\dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{H}^{\perp} = \dim \mathcal{E}$.

◄ Чтобы доказать, что $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$, нужно проверить условия 1) и 2) определения 2.1. Взяв два произвольных вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, принадлежащих $\mathcal{H}^{\perp}$, *умножим скалярно* их *сумму* на произвольный вектор $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$. Получим:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}) = 0 + 0 = 0,$$

т.е. для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из множества $\mathcal{H}^{\perp}$ их сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ принадлежит тому же множеству.

Теперь рассмотрим *произведение вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$ *на* произвольное действительное *число* λ. Для произвольного вектора $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$

$$(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

и поэтому $\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$, если $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$. Следовательно, $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$.

Отметим, что любой вектор $\boldsymbol{x}$, принадлежащий пересечению $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp}$, ортогонален самому себе: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, так как любой вектор из $\mathcal{H}^{\perp}$ ортогонален любому вектору подпространства $\mathcal{H}$. Но вектор ортогонален самому себе лишь в том случае, когда он *нулевой* (*аксиома* г) *скалярного умножения*). Поэтому $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$, а *сумма* $\mathcal{H} + \mathcal{H}^{\perp}$ рассматриваемых *линейных* *подпространств* является *прямой* (см. теорему 2.3). Докажем, что эта прямая сумма совпадает со всем евклидовым пространством $\mathcal{E}$.

Выберем некоторый *ортонормированный базис* $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ и дополним его до базиса $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{f}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $\dim\mathcal{E} = n$. Исходя из этого базиса построим при помощи процесса Грама — Шмидта ортонормированный базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_m\ \boldsymbol{e}_{m+1}\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)$ в $\mathcal{E}$. Так как первые m векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ исходного базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину, процесс ортогонализации оставит их без изменения, т.е. $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$, $i = \overline{1, m}$. Векторы $\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ ортогональны каждому из векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ базиса линейного подпространства $\mathcal{H}$ и, следовательно, ортогональны $\mathcal{H}$, так как $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$. Поэтому все они попадают в ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ и запишем его *разложение по базису* $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Легко увидеть, что $\boldsymbol{x}_1 = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{e}_m$ есть вектор из $\mathcal{H}$, а $\boldsymbol{x}_2 = x_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ есть вектор из $\mathcal{H}^\perp$, при этом $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$. Следовательно, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$, и так как вектор $\boldsymbol{x}$ выбирался произвольно, то $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = \mathcal{E}$.

Согласно следствию из теоремы 2.5, из соотношения $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = \mathcal{E}$ вытекает следующее равенство для *размерностей*: $\dim\mathcal{E} = \dim\mathcal{H} + \dim\mathcal{H}^\perp$. ►

Следствие 3.1. Каково бы ни было линейное подпространство $\mathcal{H}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ можно однозначно представить в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^\perp, \tag{3.11}$$

где $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$, $\boldsymbol{h}^\perp \in \mathcal{H}^\perp$.

◄ Действительно, это утверждение означает, что $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$. ►

Вектор $\boldsymbol{h}$ в разложении (3.11) называют ***ортогональной проекцией*** вектора $\boldsymbol{x}$ на линейное подпространство $\mathcal{H}$, а вектор $\boldsymbol{h}^{\perp}$ — ***ортогональной составляющей*** вектора $\boldsymbol{x}$ относительно линейного подпространства $\mathcal{H}$.

Как построить ортогональное дополнение к данному линейному подпространству? Пусть линейное подпространство $\mathcal{H}$ определено наиболее распространенным способом — как *линейная оболочка* некоторой *системы векторов* $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$. Согласно определению 3.8 ортогонального дополнения, любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$ должен быть ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}_i$:

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{3.12}$$

Наоборот, если вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет системе равенств (3.12), т.е. он ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}_i$, то этот вектор ортогонален и любой *линейной комбинации* системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ (см. **3.5**). Значит, $\boldsymbol{x}$ ортогонален каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_m\}$ и принадлежит линейному подпространству $\mathcal{H}^{\perp}$.

Итак, система уравнений (3.12) описывает ортогональное дополнение линейного подпространства $\mathcal{H}$. Запишем эту систему в координатах в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Пусть векторы $\boldsymbol{a}_i$ в этом базисе имеют разложения

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{a}_i &= a_{i1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{in}\boldsymbol{e}_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{a}_m &= a_{m1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

Координаты произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе обозначим x_1, ..., x_n, т.е. полагаем, что

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Тогда в ортонормированном базисе e

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) = \left(a_{i1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{in}\boldsymbol{e}_n, x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n\right) = \\ = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, система (3.12), записанная в координатах относительно ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$, имеет вид

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{gathered} \tag{3.13}$$

т.е. представляет собой однородную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Строки матрицы A этой системы совпадают с наборами координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$. Поэтому матрица A имеет ранг, равный рангу системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$, т.е. этот ранг совпадает с размерностью линейного подпространства $\mathcal{H}$.

Каждое решение системы (3.13) представляет собой набор координат некоторого вектора из $\mathcal{H}^{\perp}$ и наоборот, любой вектор из $\mathcal{H}^{\perp}$ описывает решение системы (3.13). Поэтому можно сказать, что множество всех решений этой системы есть линейное подпространство $\mathcal{H}^{\perp}$. Согласно теореме 3.6, это подпространство имеет размерность $n - \dim\mathcal{H} = n - \operatorname{Rg} A$. Множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) описывается при помощи *фундаментальной системы решений*. Напомним, что столбцы фундаментальной системы решений линейно независимы, а любое решение однородной СЛАУ представляется в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной системы решений. Другими словами, фундаментальная система решений — это базис в подпространстве всех решений данной однородной СЛАУ. Каждый столбец фундаментальной системы решений представляет собой координатную запись вектора линейного подпространства $\mathcal{H}^{\perp}$ в выбранном базисе $\boldsymbol{e}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$, при этом такие векторы в совокупности образуют базис подпространства $\mathcal{H}^{\perp}$. Мы здесь можем не различать фундаментальную систему решений системы (3.13) и соответствующий ей базис ортогонального дополнения $\mathcal{H}^{\perp}$.

Пример 3.16. Пусть линейное подпространство $\mathcal{H}$ представляет собой линейную оболочку системы векторов, заданных координатами в некотором фиксированном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ четырехмерного евклидова пространства $\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1\\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 11\\ 10\\ -8\\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 14\\ 12\\ -10\\ 12 \end{pmatrix}.$$

Найдем какой-либо базис ортогонального дополнения $\mathcal{H}^{\perp}$.

Записываем систему вида (3.13), используя координаты векторов $\boldsymbol{a}_i$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0,\\ 11x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0,\\ 14x_1 + 12x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0, \end{cases}$$

и находим ее фундаментальную систему решений. Это можно сделать, например, с помощью приведения матрицы системы к ступенчатому виду методом элементарных преобразований [III]. В качестве базисных переменных выберем x_1 и x_2. Тогда фундаментальная система решений будет содержать два решения, например:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 4\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -6\\ 3\\ 0\\ 4 \end{pmatrix}.$$

Столбцы найденной фундаментальной системы решений представляют собой координаты двух векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ из $\mathcal{E}$, образующих базис линейного подпространства $\mathcal{H}^{\perp}$, но этот базис не является ортонормированным. Чтобы получить ортонормированный базис $\mathcal{H}^{\perp}$, достаточно применить процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Сделав это, находим векторы $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1$,

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{21}\boldsymbol{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{12}{21}\boldsymbol{e}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

и ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathcal{H}^{\perp}$:

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\boldsymbol{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{1}{5\sqrt{7}}\boldsymbol{e}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Дополнение 3.1. Нормы матриц

В *линейном пространстве* $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n *норму* можно задавать различными способами. Например, это линейное пространство можно трактовать как n^2*-мерное линейное арифметическое пространство* со *стандартным скалярным умножением*, которому соответствует *евклидова норма*. Для матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ эта норма имеет вид

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Ее называют ***евклидовой нормой*** или ***l_2-нормой***.

Евклидова норма матрицы никак не связана с расположением элементов матрицы по строкам и столбцам. Это обычно нежелательно, и поэтому она используется редко. Бóльший интерес представляют нормы матриц, использующие специфику записи матриц. Такая норма может быть связана с некоторой нормой, заданной для столбцов матрицы. Важно также и то, как норма связана с операцией умножения матриц. В этом разделе *векторы линейных арифметических пространств* удобно записывать как матрицы-столбцы, отождествляя векторы со столбцами их координат в стандартном базисе (см. замечание 1.4).

Определение 3.9. Пусть в линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ задана норма $\|\cdot\|_*$. Норму $\|\cdot\|_m$ в линейном пространстве $M_n(\mathbb{R})$ называют ***согласованной*** с нормой $\|\cdot\|_*$, если для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ и любого столбца $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение

$$\|A\boldsymbol{x}\|_* \leqslant \|A\|_m \, \|\boldsymbol{x}\|_*. \tag{3.14}$$

Каждая ли норма в $\mathbb{R}^n$ имеет согласованную с ней норму в $M_n(\mathbb{R})$? Ответ на этот вопрос утвердительный. Приведем пример такой нормы. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана норма $\|\cdot\|_*$. На линейном пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ рассмотрим функцию

$$\|A\|_i = \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*}. \tag{3.15}$$

Из формулы не ясно, всегда ли определена указанная функция, т.е. всегда ли *точная верхняя грань* имеет конечное значение. Отметим, что, согласно *аксиомам нормы* и свойствам матричного умножения,

$$\sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \left\| A\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \right\|_* = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_*=1} \|A\boldsymbol{x}\|_*.$$

Следовательно, значение $\|A\|_i$ равно точной верхней грани функции $\|A\boldsymbol{x}\|_*$ на множестве $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \|\boldsymbol{x}\|_* = 1\}$. Можно показать, что это *множество замкнутое* и *ограниченное* (в частных случаях это показывает пример 3.8), а функция $\|A\boldsymbol{x}\|_*$

непрерывна на нем. На замкнутом ограниченном множестве непрерывная функция ограничена и достигает точной верхней грани [V]. Значит, величина $\|A\|_i$ конечна, причем существует такой вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ единичной нормы, что $\|A\|_i = \|A\boldsymbol{y}\|_*$.

Итак, соотношение (3.15) корректно задает функцию на линейном пространстве $M_n(\mathbb{R})$. Покажем, что эта функция является нормой, т.е. верны три аксиомы нормы. Выполнение аксиомы а) очевидно. Проверим аксиому б):

$$\|\lambda A\|_i = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\lambda A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left(|\lambda| \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \right) = |\lambda|\, \|A\|_i\,.$$

Аксиома в) нормы также верна:

$$\|A+B\|_i = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|(A+B)\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_* + \|B\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left(\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} + \frac{\|B\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} + \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|B\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \|A\|_i + \|B\|_i\,.$$

Норму, определенную соотношением (3.15), называют ***индуцированной*** (или ***подчиненной***, ***операторной***) и используют для нее то же обозначение, что и для порождающей ее исходной нормы в $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_* \equiv \|A\|_i = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*}.$$

Индуцированная норма всегда согласована с исходной нормой в $\mathbb{R}^n$, так как для любой матрицы A и любого $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} = \|A\|_*\,,$$

что эквивалентно (3.14) при $\|A\|_m = \|A\|_*$. Индуцированная норма является наименьшей из всех норм, согласованных с данной нормой в $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть задана норма $\|\cdot\|$ в линейном пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$, согласованная с нормой $\|\cdot\|_*$ в $\mathbb{R}^n$. Выберем произвольную матрицу A, а в качестве вектора $\boldsymbol{x}$ выберем тот, на котором функция $\|A\boldsymbol{x}\|_*$ достигает наибольшего значения на множестве $\{\|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ всех векторов единичной нормы. Тогда

$$\|A\|_* = \|A\boldsymbol{x}\|_* \leqslant \|A\| \, \|\boldsymbol{x}\|_* = \|A\|,$$

так как норма $\|\cdot\|$ согласована с нормой $\|\cdot\|_*$.

Говорят, что норма $\|\cdot\|$ в линейном пространстве матриц $M_n(R)$ является ***матричной***, или ***кольцевой***, если

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

Первый термин не совсем удачен, так как более естественно назвать матричной любую норму, заданную в линейном пространстве матриц. Отметим, что любая индуцированная норма является кольцевой, так как

$$\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \leqslant \frac{\|A\|_* \, \|B\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \leqslant \|A\|_* \, \|B\|_*$$

для любого ненулевого столбца $\boldsymbol{x}$ в силу согласованности индуцированной нормы. Поэтому

$$\|AB\|_* = \sup_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\|AB\boldsymbol{x}\|_*}{\|\boldsymbol{x}\|_*} \leqslant \|A\|_* \, \|B\|_*.$$

Задавая различные нормы в $\mathbb{R}^n$, мы получаем индуцированные нормы в линейном пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ евклидову норму $\|\cdot\|_2$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Индуцированную ею норму в линейном пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ называют ***спектральной нормой.*** Это название вызвано тем, что спектральная норма $\|A\|_2$ матрицы A равна $\sqrt{\lambda}$, где λ — максимальное *собственное значение матрицы* $A^{\mathrm{T}}A$.

Задав в $\mathbb{R}^n$ *l_1-норму*

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|,$$

в качестве индуцированной получим следующую норму:

$$\|A\|_c = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|a_{1j}| + \ldots + |a_{nj}|\},$$

т.е. нормой матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ является максимальная из l_1-норм столбцов этой матрицы. Поэтому ее называют ***максимальной столбцевой*** или ***октаэдрической.***

В качестве нормы в $\mathbb{R}^n$ выберем *l_∞-норму*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Тогда индуцированной нормой будет функция

$$\|A\|_s = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|a_{i1}| + \ldots + |a_{in}|\},$$

т.е. нормой матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ будет максимальная из l_1-норм строк этой матрицы. Поэтому ее называют ***максимальной строчной*** или ***кубической.***

Особо стоит евклидова норма матриц $\|A\|_2$, которая не является индуцированной. Действительно, непосредственно из определения (3.15) индуцированной нормы следует, что, какова бы ни была норма в $\mathbb{R}^n$, индуцированная норма *единичной матрицы* всегда равна единице. Однако нетрудно убедиться, что евклидова норма единичной матрицы $E \in M_n(\mathbb{R})$ равна $\sqrt{n} > 1$ (при $n > 1$).

Евклидова норма матриц является кольцевой. Действительно, пусть даны квадратные матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ порядка n. Их произведением будет матрица $C = (c_{ik})$ с элементами

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$. Так как, согласно *неравенству Коши*,

$$c_{ik}^2 \leqslant (a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2)(b_{1k}^2 + \ldots + b_{nk}^2),$$

заключаем, что

$$c_{i1}^2 + \ldots + c_{in}^2 \leqslant (a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2 = (a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2) \left\| B \right\|_2^2$$

и

$$\left\| AB \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \Big) \left\| B \right\|_2^2 = \left\| A \right\|_2^2 \left\| B \right\|_2^2.$$

В линейном пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$, интерпретируя его как линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^{n^2}$, можно задать l_1-норму

$$\left\| A \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

и l_∞-норму

$$\left| A \right\|_\infty = \max_{i,j} \{ |a_{ij}| \},$$

где $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. В приложениях теории матриц первая норма заметного интереса не представляет. Вторая норма оценивает величину матрицы по максимальному из абсолютных значений ее элементов и необходима при изучении свойств различных методов вычислений. Можно показать, что l_∞-норма в $M_n(\mathbb{R})$ не является кольцевой, а потому она не согласована ни с какой нормой в $\mathbb{R}^n$. Этот недостаток можно нейтрализовать, модифицировав эту норму. Новая норма

$$\left\| A \right\|_\infty = n \cdot \max_{i,j} \{ |a_{ij}| \},$$

отличающаяся от старой корректирующим множителем n, равным порядку матрицы, уже является кольцевой и согласована с тремя основными нормами в $\mathbb{R}^n$: евклидовой, l_1-нормой и l_∞-нормой.

Дополнение 3.2. Метод наименьших квадратов

Постановка задачи. Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно k неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{k1}x_k = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{k2}x_k = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_k = b_n, \end{cases} \tag{3.16}$$

или в матричной записи

$$Ax = b. \tag{3.17}$$

Каждому набору значений неизвестных сопоставим числа

$$d_i = b_i - (a_{1i}x_1 + \ldots + a_{ki}x_k), \quad i = \overline{1, n},$$

которые называют ***невязками уравнений*** системы для заданного набора значений неизвестных. Очевидно, что набор значений неизвестных является решением системы тогда и только тогда, когда соответствующие ему невязки всех уравнений системы равны нулю.

Отметим, что функция

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \bigl[b_i - (a_{1i}x_1 + \ldots + a_{ki}x_k)\bigr]^2$$

на решениях системы равна нулю и положительна в остальных случаях. Поэтому ее можно рассматривать как оценку отклонения набора значений неизвестных от точного решения системы. Если система несовместна, то часто возникает задача найти вместо отсутствующих решений такой набор значений неизвестных, который приводит к наименьшему значению функции f. Такой подход в решении некорректной (т.е. не имеющей решений) задачи называют ***методом наименьших квадратов***, поскольку ищется минимум функции, являющейся суммой квадратов.

Сформулированная задача по своему типу относится к классу задач минимизации функций многих переменных [V] и может быть решена общими методами поиска минимума. Однако ей можно придать алгебро-геометрическую интерпретацию и полностью решить методами линейной алгебры. Для придания задаче такой интерпретации будем трактовать столбцы коэффициентов при неизвестных, столбец правых частей уравнений (3.16) как столбцы *координат векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}$ *евклидова арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ в *стандартном базисе*, отождествляя при этом векторы с их столбцами координат (см. замечание 1.4). Тогда и набор невязок уравнений системы можно рассматривать как вектор $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, который, согласно определению невязок, определяется соотношением

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - (x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k).$$

Число $\|\boldsymbol{d}\|$ назовем ***невязкой СЛАУ*** (3.17). Вычислив скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{d}$, находим

$$\|\boldsymbol{d}\|^2 = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Следовательно, задача сводится к определению таких действительных коэффициентов $x_1, \ldots, x_k$, при которых величина $\|\boldsymbol{d}\|$ имеет наименьшее значение.

Решение задачи. Введем *линейное подпространство* $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ и его *ортогональное дополнение* $\mathcal{H}^\perp$. Разложим вектор $\boldsymbol{b}$ на его *ортогональную проекцию* на линейное подпространство $\mathcal{H}$ и соответствующую *ортогональную составляющую*:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^\perp, \qquad \boldsymbol{h} \in \mathcal{H}, \quad \boldsymbol{h}^\perp \in \mathcal{H}^\perp.$$

Тогда

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^\perp - (x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k) = \\ = \boldsymbol{h}^\perp + (\boldsymbol{h} - x_1\boldsymbol{a}_1 - \ldots - x_k\boldsymbol{a}_k) = \boldsymbol{h}^\perp + \boldsymbol{d}_0,$$

где

$$\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{h} - x_1\boldsymbol{a}_1 - \ldots - x_k\boldsymbol{a}_k \in \mathcal{H}.$$

Так как $\boldsymbol{d}_0 \perp \boldsymbol{h}^{\perp}$, то по *теореме Пифагора* заключаем, что

$$\|\boldsymbol{d}\|^2 = \|\boldsymbol{d}_0\|^2 + |\boldsymbol{h}^{\perp}|^2.$$

Ортогональная составляющая $\boldsymbol{h}^{\perp}$ вектора невязок постоянна и от выбора коэффициентов x_i не зависит. Поэтому минимизация величины $\|\boldsymbol{d}|^2$ сводится к поиску минимума величины $\|\boldsymbol{d}_0\|^2$. Эта величина является неотрицательной и достигает минимума, если обращается в нуль, т.е. при условии, что $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{0}$. А это равносильно тому, что $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{h}^{\perp}$, т.е. вектор невязок принадлежит ортогональному дополнению $\mathcal{H}^{\perp}$ и поэтому является решением системы

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{d}) = 0, \qquad j = \overline{1, k}, \tag{3.18}$$

или

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} - x_1\boldsymbol{a}_1 - \ldots - x_k\boldsymbol{a}_k) = 0, \qquad j = \overline{1, k},$$

(см. **3.9**). После преобразований получаем СЛАУ

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)x_1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k)x_k = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1)x_1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k)x_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}) \end{cases} \tag{3.19}$$

относительно неизвестных x_1, ..., x_k. Матрица этой системы $\Gamma = \big((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\big)$ — это квадратная матрица порядка k, представляющая собой *матрицу Грама* для *системы векторов* $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$.

Теорема 3.7. Если *система векторов* $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ *линейно независима*, то ее матрица Грама является невырожденной.

◄ Докажем равносильное утверждение, что если матрица Грама системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ вырождена, то эта *система векторов линейно зависима.* Вырожденность матрицы Грама означает, что ее столбцы линейно зависимы и один из них, например первый, является линейной комбинацией остальных [III]:

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1) = \sum_{j=2}^{k} \mu_j \, (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\,, \qquad i = \overline{1, k},$$

или

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{f}) = 0, \qquad i = \overline{1, k}, \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}_1 - \sum_{j=2}^{k} \mu_j \boldsymbol{a}_j.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{f}$ принадлежит ортогональному дополнению линейного подпространства $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$, а поскольку $\boldsymbol{f} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$, то $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, т.е.

$$\boldsymbol{a}_1 - \sum_{j=2}^{k} \mu_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}.$$

Это равенство означает, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, так как коэффициент при $\boldsymbol{a}_1$ не равен нулю. ▶

Отметим, что система линейных алгебраических уравнений (3.19) всегда совместна: ее решениями являются коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ по системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$, так как в этом случае вектор $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^{\perp}$ — решение системы (3.18). Если система векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ линейно независима, то, согласно доказанной теореме, матрица СЛАУ (3.19) невырождена и эта система имеет единственное решение, которое дает решение исходной задачи. Если же указанная система векторов линейно зависима, то матрица СЛАУ (3.19) вырождена. В этом случае квадратная СЛАУ (3.19), будучи совместной, имеет бесконечно много решений и каждое из них дает решение исходной задачи. Среди этих решений можно выбирать те, которые удовлетворяют каким-то дополнительным условиям.

Дополнение 3.3. Псевдорешения и псевдообратная матрица

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$, вообще говоря, несовместную, с матрицей A типа $n\times k$. Мы остановимся на тех столбцах x, которые для рассматриваемой системы дают минимальную *невязку*. Если СЛАУ $Ax = b$ совместна, то такие столбцы представляют собой ее решения. Если же СЛАУ несовместна, то столбцы, дающие минимальную невязку, можно находить при помощи *метода наименьших квадратов*. В этом разделе изложим другой метод их нахождения, используя отождествление *векторов евклидова арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ с матрицами-столбцами их *координат* в *стандартном базисе*.

СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ соответствует СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, которую называют ***нормальной***.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ — столбцы матрицы A. СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ может быть записана в векторной форме:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}.$$

Совместность СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ означает, что вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ попадает в *линейную оболочку* $\mathcal{H}$ *системы векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Пусть $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{H}$. Разложим вектор $\boldsymbol{b}$ в сумму $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^{\perp}$, где $\boldsymbol{h}$ — *ортогональная проекция* вектора $\boldsymbol{b}$ на *линейное подпространство* $\mathcal{H}$, а $\boldsymbol{h}^{\perp}$ — *ортогональная составляющая* этого вектора. Введенные обозначения используем в формулировках и доказательстве следующих трех теорем.

Теорема 3.8. *Для любой СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ следующие множества совпадают:*

– *множество столбцов, дающих минимальную невязку для этой СЛАУ;*

– *множество решений СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$;*

– *множество решений нормальной СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.*

◀ *Норма* вектора $\boldsymbol{h}^{\perp}$ представляет собой минимальную невязку СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (см. **Д.3.2**), а множество векторов, дающих такую невязку, представляют собой решения СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$.

Условие $\boldsymbol{h}^{\perp} \in \mathcal{H}^{\perp}$ равносильно тому, что вектор $\boldsymbol{h}^{\perp}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, т.е.

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{h}^{\perp}) = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Мы имеем СЛАУ относительно компонент столбца $\boldsymbol{h}^{\perp}$, которая в матричной форме имеет вид $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^{\perp} = \boldsymbol{0}$.

Умножим СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$, решения которой дают для системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ минимальную невязку, на матрицу A^{T} слева. Учитывая, что $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^{\perp} = \boldsymbol{0}$, получим

$$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^{\perp} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

Значит, все векторы $\boldsymbol{x}$, дающие для СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ минимальную невязку, являются решениями СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$. Верно и обратное: если вектор $\boldsymbol{x}$ является решением системы $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, то для СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ он дает минимальную невязку. Действительно, если $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, то $A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, а это означает, что вектор $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и, следовательно, принадлежит линейному пространству $\mathcal{H}^{\perp}$. Поскольку $\boldsymbol{b}'' = A\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, то $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'' + \boldsymbol{b}'$. Согласно следствию 3.1, последнее равенство совпадает с разложением $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^{\perp}$. Поэтому $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{h}^{\perp}$, а норма вектора $\boldsymbol{b}'$, представляющая собой невязку, будет минимальной. ▶

Теорема 3.9. Нормальная система линейных алгебраических уравнений всегда совместна.

◀ СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ соответствует нормальная СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$. Решениями нормальной СЛАУ являются векторы $\boldsymbol{x}$, дающие минимальную невязку для исходной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и являющиеся решениями СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$. Последняя же система всегда имеет решения, так как в векторной форме она имеет вид $x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{h}$, где $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$. ▶

Теорема 3.10. Для того чтобы нормальная СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы:

– однородная *СЛАУ* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ была *определенной;*

– ранг матрицы A совпадал с количеством ее столбцов;

– *векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ были *линейно независимы.*

◄ Так как множества решений систем $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ совпадают, то из теоремы о структуре общего решения СЛАУ [III] следует, что тогда совпадают и множества решений соответствующих однородных систем $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ и $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Если эти однородные системы определенны, т.е. имеют единственное решение, то СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет единственный вектор с минимальной невязкой и наоборот. Для того чтобы однородная система $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен количеству столбцов в ней, или, другими словами, чтобы столбцы матрицы были линейно независимы [III]. ►

Псевдорешения и их свойства. Если для системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ бесконечное количество векторов $\boldsymbol{x}$ дает минимальную невязку, то обычно выбор останавливают на том из них, который имеет минимальную норму. Такой вектор называют ***нормальным псевдорешением*** (или просто ***псевдорешением***) СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Таким образом, псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений — это такой вектор, который дает минимальную невязку в этой системе и среди таких векторов имеет минимальную норму.

Теорема 3.11. Любая СЛАУ имеет псевдорешение, и притом единственное.

◄ Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$, дающих минимальную невязку для СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, описывается формулой

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{ч}} + \boldsymbol{x}_{\text{о}}, \tag{3.20}$$

где $\boldsymbol{x}_\text{ч}$ — некоторое частное решение соответствующей нормальной СЛАУ; $\boldsymbol{x}_\text{о}$ — общее решение однородной СЛАУ $A^\text{т}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, которое является общим решением и однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (см. доказательство теоремы 3.10).

Обозначим через $\mathcal{K}$ линейное подпространство всех решений однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Тогда имеет место представление $\boldsymbol{x}_\text{ч} = \boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp + \boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ$, где $\boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ \in \mathcal{K}$, $\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp \in \mathcal{K}^\perp$, и поскольку $\boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ + \boldsymbol{x}_\text{о} \in \mathcal{K}$, то для любого $\boldsymbol{x}$ вида (3.20), согласно *теореме Пифагора*, имеем

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}_\text{ч} + \boldsymbol{x}_\text{о}\|^2 = \|\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp + (\boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ + \boldsymbol{x}_\text{о})\|^2 = \\ = \|\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp\|^2 + \|\boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ + \boldsymbol{x}_\text{о}\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp\|^2.$$

Равенство $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp\|$ возможно и притом лишь в единственном случае, когда $\boldsymbol{x}_\text{ч}^\circ + \boldsymbol{x}_\text{о} = \mathbf{0}$, или $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp$. Следовательно, среди векторов, дающих минимальную невязку СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, минимальную норму будет иметь вектор $\boldsymbol{x}_\text{ч}^\perp$, и только он. Этот вектор является ортогональной составляющей (любого) частного решения нормальной СЛАУ относительно линейного подпространства $\mathcal{K}$ всех решений соответствующей однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ►

Оказывается, что для любой СЛАУ можно построить такую другую СЛАУ, единственным решением которой является псевдорешение исходной СЛАУ. Для нахождения такой СЛАУ воспользуемся тем, что, согласно доказательству теоремы 3.11, условие минимальности нормы псевдорешения СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ означает его ортогональность всем векторам линейного подпространства $\mathcal{K}$ решений соответствующей однородной системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ортогональность линейному подпространству $\mathcal{K}$ равносильна тому, что псевдорешение ортогонально каждому из векторов произвольно выбранной *фундаментальной системы решений* СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Условия ортогональности представляют собой линейные уравнения, добавив которые к нормальной СЛАУ, мы и получим такую СЛАУ, единственным решением которой будет псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Пример 3.17. Если матрица A нулевая, то псевдорешением СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является нулевой вектор. Действительно, в этом случае невязка не зависит от выбора вектора $\boldsymbol{x}$ и равна $\|\boldsymbol{b}\|$. Минимальную же норму среди всех векторов линейного арифметического пространства имеет нулевой вектор.

Пример 3.18. Если матрица A является квадратной и невырожденной, то псевдорешение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ совпадает с ее обычным решением, так как минимальная невязка, равная нулю, будет достигаться на единственном векторе, являющемся решением этой системы. Псевдорешение совпадет с решением и в случае, когда матрица A не является квадратной, но имеет ранг, совпадающий с количеством столбцов. Это возможно в том случае, когда число строк превышает число столбцов. Такую систему можно заменить эквивалентной ей квадратной, отбрасывая лишние уравнения.

Пример 3.19. Рассмотрим простейшую систему

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

двух уравнений с двумя неизвестными. Видно, что эта система несовместна. Последовательно вычисляем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нормальная СЛАУ в этом случае состоит из двух одинаковых уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

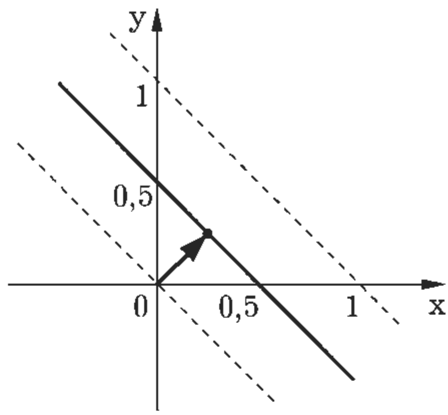


Рис. 3.7

Множество решений нормальной системы, т.е. множество пар x, y, дающих минимальную невязку в исходной системе, на плоскости изображается прямой $x + y - 0{,}5$ (рис. 3.7), а псевдорешением будет точка этой прямой, ближайшая к началу координат, т.е. точка с координатами $x = 0{,}25$, $y = -0{,}25$. Этой точке соответствует радиус-вектор с наименьшей нормой среди всех радиус-векторов точек прямой $x + y = 0{,}5$.

Если одно из уравнений исходной системы умножить на коэффициент, то и множество решений нормальной системы, и псевдорешение данной системы изменятся. Это достаточно очевидно, так как умножение уравнения на коэффициент изменяет, вообще говоря, его невязку. Например, умножив второе уравнение рассматриваемой системы на 2:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y - 2 \end{cases}$$

и вычислив

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{т}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{т}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

находим, что нормальная СЛАУ и в этом случае будет состоять из двух идентичных уравнений $5x + 5y = 4$, но они уже другие. Псевдорешением рассматриваемой системы будет $x = 0{,}4$, $y = 0{,}4$.

Пример 3.20. Рассмотрим на плоскости треугольник с вершинами (1; 1), (2; 2), (3; 1) (рис. 3.8). Прямые, на которых

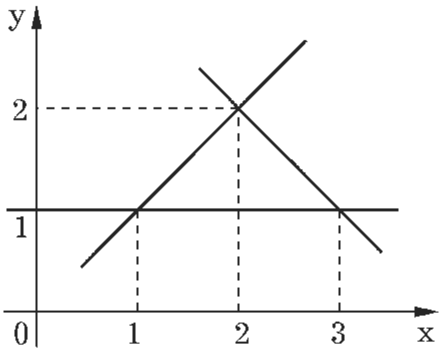


Рис. 3.8

лежат стороны этого треугольника, опишем при помощи *нормальных уравнений* и составим из них систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} = 0, \\ y = 1, \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Полученная система несовместна, так как три прямых не имеют общей точки.

Определим для полученной системы нормальную СЛАУ. Для этого последовательно находим:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{т}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{т}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Нормальная СЛАУ $A^{\mathrm{т}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{т}}\boldsymbol{b}$ имеет единственное решение $x = 2$, $y = 1{,}5$, являющееся (в силу единственности) псевдорешением исходной системы.

Так как прямые плоскости заданы нормальными уравнениями, квадрат невязки системы для вектора $(x_0,\ y_0)$ будет равен сумме квадратов расстояний от точки $(x_0; y_0)$ до трех прямых. Найденному псевдорешению на плоскости соответствует точка $(2; 1{,}5)$, сумма квадратов расстояний от которой до трех сторон треугольника является минимальной. #

Псевдорешения сохраняют линейные свойства решений линейных систем.

Теорема 3.12. Если $\boldsymbol{x}_1$ — псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ — псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, то $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ — псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2$.

◀ Из условий теоремы вытекает, что $\boldsymbol{x}_i$ является решением нормальной СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2$. Значит, $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ является решением нормальной СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + A^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{b}_2$, и нам остается показать, что при этом $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ имеет минимальную норму или, что то же самое, $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ и любое решение $\boldsymbol{y}$ однородной СЛАУ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ортогональны.

Отметим, что псевдорешения $\boldsymbol{x}_i$ ортогональны всем решениям СЛАУ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ как псевдорешения систем, различающихся лишь правыми частями. Это значит, что $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i) = 0$, если $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Поэтому

$$(\boldsymbol{y}, \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2) = 0,$$

если $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. ▶

Псевдообратная матрица. Решение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с квадратной невырожденной матрицей A может быть записано с помощью *обратной матрицы* в виде $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ [III]. Обратная матрица A^{-1} является решением матричного уравнения $AX = E$, где E — *единичная матрица*, а столбцы $\boldsymbol{c}_i$ обратной матрицы являются решениями систем $A\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ — *стандартный базис* в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ (столбец $\boldsymbol{e}_i$ является также i-м столбцом единичной матрицы). Для $\boldsymbol{b} = (b_1 \ \ldots \ b_n)^{\mathrm{T}}$ справедливо разложение $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{e}_n$, и поэтому формула $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ в векторной форме записывается в виде $\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{g}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{g}_n$, т.е. в виде линейной комбинации решений $\boldsymbol{g}_i$, коэффициентами в которой служат правые части b_i уравнений системы.

Этот подход позволяет обобщить понятие обратной матрицы и использовать это обобщение для нахождения псевдорешений примерно так же, как обратную матрицу для построения обычных решений.

Рассмотрим СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с произвольной матрицей A типа $n \times k$. Пусть $\boldsymbol{g}_i$ — псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Матрицу $A^+ = (\boldsymbol{g}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{g}_n)$, составленную из столбцов $\boldsymbol{g}_i$, называют ***псевдообратной*** к матрице A. Отметим, что матрица A^+ имеет тип $k\times n$, т.е. тот же, что и транспонированная матрица $A^{\mathrm{т}}$.

Теорема 3.13. Псевдорешением СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является вектор $\boldsymbol{x} = A^+\boldsymbol{b}$.

◀ Действительно, если $\boldsymbol{g}_i$ — псевдорешение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, то, согласно теореме 3.12, $\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{g}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{g}_n$ является псевдорешением системы с той же матрицей и правой частью $b_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{b}$, т.е. рассматриваемой системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▶

Как вытекает из изложенного, любая матрица имеет псевдообратную. Если матрица A квадратная невырожденная, то ее псевдообратная матрица A^+ совпадает с обратной A^{-1}, так как в этом случае псевдорешения $\boldsymbol{g}_i$ систем $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ будут совпадать с обычными решениями и, следовательно, будут столбцами обратной матрицы.

Пример 3.21. Если A — нулевая матрица типа $n\times k$, то A^+ — также нулевая, но типа $k\times n$. В этом случае псевдорешением системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, будет нулевой столбец высоты k (см. пример 3.17).

Пример 3.22. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет ранг 2, а соответствующая СЛАУ при любой правой части, согласно теореме Кронекера — Капелли, будет совместна, так как ранг расширенной матрицы не может превышать двух и потому совпадает с рангом матрицы системы. Поэтому псевдорешение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является одним из ее решений. Оно выделяется среди всех решений тем, что является ортогональным каждому решению соответствующей однородной системы.

Фундаментальная система решений СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ состоит из одного вектора (поскольку $\operatorname{Rg} A = 2$), и в качестве этого вектора можно взять $(1\ \ -2\ \ 1)^{\mathrm{T}}$. Добавляя условие ортогональности, получаем две системы для нахождения столбцов $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$ псевдообратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим

$$\boldsymbol{g}_1=\begin{pmatrix} -17/18 \\ -1/9 \\ 13/18 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_2=\begin{pmatrix} 4/9 \\ 1/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} -17/18 & 4/9 \\ -1/9 & 1/9 \\ 13/18 & -2/9 \end{pmatrix}.$$

Вопросы и задачи

3.1. Для каких векторов евклидова пространства неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство?

3.2. Можно ли утверждать, что в евклидовом пространстве верна теорема о трех перпендикулярах?

3.3. Выясните, является ли линейное пространство $M_2(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц второго порядка евклидовым относительно операции: а) $(A, B) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$; б) $(A, B) = a_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1d_2$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

3.4. Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы

$$\boldsymbol{a}_1=(1,\ -2,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2=(-1,\ 0,\ 1), \quad \boldsymbol{a}_3=(5,\ -3,\ -7)$$

образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис.

3.5. Проверьте, что в $\mathbb{R}^3$ векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ -2,\ 2),\quad \boldsymbol{a}_2 = (-2,\ -2,\ -1),\quad \boldsymbol{a}_3 = (2,\ -1,\ -2)$$

образуют ортогональный базис, и для вектора $\boldsymbol{x} = (1,\ 2,\ 3)$ найдите разложение по этому базису.

3.6. Убедитесь, что в $\mathbb{R}^4$ векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1),\quad \boldsymbol{a}_2 = (1,\ 1,\ -5,\ 3),\quad \boldsymbol{a}_3 = (3,\ 2,\ 8,\ -7)$$

линейно независимы. Используя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, постройте ортогональный базис для линейной оболочки этих векторов.

3.7. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два вектора

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 3),\quad \boldsymbol{a}_2 = (2,\ 1,\ -3,\ 1).$$

Убедитесь, что эти векторы ортогональны. Для линейной оболочки этих векторов найдите ортогональное дополнение (в виде линейной оболочки) и постройте его ортонормированный базис.

3.8. Определите размерность и найдите ортонормированный базис линейной оболочки векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (2,\ 1,\ 3,\ -1), & \boldsymbol{a}_2 &= (7,\ 4,\ 3,\ -3),\\ \boldsymbol{a}_3 &= (1,\ 1,\ -6,\ 0), & \boldsymbol{a}_4 &= (5,\ 7,\ 7,\ 8). \end{aligned}$$

Дополните этот базис до ортонормированного базиса евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

3.9. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1), & \boldsymbol{a}_2 &= (1,\ 2,\ 2,\ -1),\\ \boldsymbol{a}_3 &= (1,\ 0,\ 0,\ 3), & \boldsymbol{y} &= (4,\ -1,\ -3,\ 4). \end{aligned}$$

Найдите ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{y}$ на линейную оболочку векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и ортогональное дополнение к этой линейной оболочке.

3.10. Найдите ортонормированный базис в линейном подпространстве свободных векторов, параллельных плоскости: а) $3x - y + 2z = 0$; б) $x + 2y - z = 0$.

3.11. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ даны три вектора $\boldsymbol{a}_1 = (1,\ -1,\ 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,\ 0,\ 1)$. Вычислите матрицу Грама этой системы и с помощью ее докажите, что $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — базис в $\mathbb{R}^3$. Вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$ двумя способами: через их координаты в стандартном базисе и в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ при помощи найденной матрицы Грама.

3.12. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

проверьте неравенство $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ для евклидовой, спектральной, октаэдрической и кубической норм.

3.13. Для вектора $\boldsymbol{x} = (1,\ -1,\ 2,\ -1) \in \mathbb{R}^4$ проверьте выполнение неравенств $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1$ ($\|\boldsymbol{x}\|$ — евклидова норма вектора $\boldsymbol{x}$).

3.14. Изобразите на плоскости множества точек, радиус-векторы которых удовлетворяют условиям ($\varepsilon > 0$): а) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \varepsilon$; б) $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$; в) $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \varepsilon$; г) $1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant 2$; д) $1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 2$; е) $1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant 2$.

3.15. Даны координаты трех точек на плоскости: $A(1;9)$, $B(2;14)$, $C(3;20)$. Найдите уравнение прямой, сумма расстояний до которой от этих трех точек имеет наименьшее значение.

3.16. Найдите псевдорешение СЛАУ

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1, \\ x + 2y + 3z - 4, \\ 2x + \ \ y + 4z = 4. \end{cases}$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Определение и примеры линейных операторов

Линейная алгебра большое внимание уделяет отображениям, которые *векторам* одного *линейного пространства* ставят в соответствие векторы другого (возможно того же) линейного пространства. Среди таких отображений выделяются те, которые сохраняют алгебраические соотношения. В некотором смысле такие отображения являются и наиболее простыми, так как они естественным образом связаны со структурой линейного пространства.

Напомним некоторую терминологию из теории отображений [I]. Отображение $f\colon X \to Y$ называют ***сюръективным***, если каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$. Отображение $f\colon X \to Y$ называют ***инъективным***, если разные элементы $x_1, x_2 \in X$ имеют разные образы. Отображение одновременно и сюръективное, и инъективное называют ***биективным***. Биективное отображение устанавливает между множествами X и Y взаимно однозначное соответствие.

Определение 4.1. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$ называют ***линейным отображением*** или ***линейным оператором***, если выполнены следующие условия:

а) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$;

б) $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, который осуществляет отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в себя, называют также

линейным преобразованием линейного пространства $\mathcal{L}$ и говорят, что линейный оператор $\boldsymbol{A}$ действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Условия а), б) определения 4.1 можно скомбинировать в виде одного условия, например, так: для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ и любых действительных λ и μ

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}). \tag{4.1}$$

Нетрудно убедиться, что условия определения 4.1 являются частными случаями (4.1). С другой стороны, если выполнены условия а) и б), то

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\mu\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

т.е. выполняется и (4.1).

Свойства а), б) линейности отображения делают более удобной не традиционную форму записи линейного оператора в виде $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, при которой аргумент записывается в скобках вслед за функцией, а более простую в виде $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ как своеобразное „умножение линейного оператора на вектор". При такой записи условие а) определения 4.1 можно интерпретировать как свойство дистрибутивности этого „умножения", а условие б) — как свойство ассоциативности (если число λ записывать не слева от вектора, а справа, то запись будет выглядеть так: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\lambda) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\lambda$).

Непосредственно из определения 4.1 вытекает, что для любого линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ образом $\boldsymbol{A}\mathbf{0}$ *нулевого вектора* в $\mathcal{L}$ является нулевой вектор $\mathbf{0}'$ в $\mathcal{L}'$: $\boldsymbol{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. Действительно,

$$\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \boldsymbol{A}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0(\boldsymbol{A}\mathbf{0}) = \mathbf{0}'.$$

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов. Отметим, что для того, чтобы доказать линейность какого-либо отображения линейных пространств, нужно проверить условия а), б) определения 4.1 или комбинированное условие (4.1). Нарушение любого из этих условий означает, что отображение не является линейным. Линейный оператор переводит нулевой вектор снова в нулевой, и это свойство может рассматриваться как необходимое условие линейности (но не достаточное).

Пример 4.1. Пусть $K_n[x]$ — линейное пространство многочленов одного переменного x степени, не превышающей натуральное число n. Для каждого многочлена $P(x)$ определена его производная $P'(x)$, являющаяся многочленом степени не выше $n-1$. Таким образом, на линейном пространстве $K_n[x]$ определено отображение $\frac{d}{dx}$, которое каждому многочлену ставит в соответствие его производную. В качестве пространства значений такого отображения можно выбрать как исходное пространство $K_n[x]$, так и пространство $K_{n-1}[x]$. Оба отображения

$$\frac{d}{dx}\colon K_n[x] \to K_n[x], \qquad \frac{d}{dx}\colon K_n[x] \to K_{n-1}[x]$$

являются линейными в силу свойств линейности производной (производная суммы функций равна сумме производных, при умножении функции на число производная этой функции умножается на это число).

Пример 4.2. В пространстве V_2 свободных векторов на плоскости поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки представляет собой отображение V_2 в себя, являющееся линейным оператором. Линейность отображения вытекает из простых геометрических соображений. Во-первых, сумма свободных векторов может вычисляться по правилу параллелограмма, но тогда очевидно, что сумма двух векторов как диагональ параллелограмма при повороте векторов на угол φ также повернется на этот же угол. Во-вторых, умножение свободного вектора на число означает изменение его длины и, возможно, изменение его направления на противоположное. Ясно, что можно сначала умножить вектор на число, а потом повернуть на угол φ, а можно выполнить эти две операции в обратном порядке, т.е. повернуть вектор, а затем умножить его на число. Результат в обоих случаях будет один и тот же.

Пример 4.3. Рассмотрим *n-мерное линейное арифметическое пространство* $\mathbb{R}^n$, элементы которого будем представлять как матрицы-столбцы длиной n, и квадратную матрицу A порядка n. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое столбцу $\boldsymbol{x}$ ставит в соответствие столбец $A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$), является линейным оператором в силу свойств умножения матриц:

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = A(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda A\boldsymbol{x} + \mu A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$.

Пример 4.4. В n-мерном линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого действительного числа k отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ (растяжение в k раз с дополнительным отражением при $k < 0$), является линейным оператором. Этот линейный оператор — частный случай предыдущего, он может быть определен при помощи матрицы kE, где E — единичная матрица.

Пример 4.5. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ n-мерного линейного арифметического пространства в себя, которое задается формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ — некоторый фиксированный вектор, не является линейным, так как, например, образом нулевого вектора является вектор $\boldsymbol{a}$.

Определение 4.2. Каждому линейному оператору $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ соответствуют:

– его ***ядро*** $\ker \boldsymbol{A}$ — множество тех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, для которых $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}'$, где $\boldsymbol{0}'$ — нулевой вектор в $\mathcal{L}'$;

– его ***образ*** $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ — множество векторов $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}'$, являющихся значениями этого оператора.

Теорема 4.1. Для любого линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ его ядро $\ker \boldsymbol{A}$ является *линейным подпространством* в $\mathcal{L}$, а его образ $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ — линейным подпространством в $\mathcal{L}'$.

◀ Доказательство сводится к проверке условий определения 2.1 линейного подпространства. Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$

принадлежат множеству $\ker \boldsymbol{A}$, т.е. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}'$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}'$. Тогда, согласно условию а) определения 4.1,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}' + \mathbf{0}' = \mathbf{0}',$$

т.е. вектор $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ принадлежит множеству $\ker \boldsymbol{A}$, а, согласно условию б) того же определения, для любого действительного числа λ

$$\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}_1) = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) = \lambda\mathbf{0}' = \mathbf{0}',$$

т.е. и вектор $\lambda\boldsymbol{x}_1$ принадлежат $\ker \boldsymbol{A}$. Как видим, *множество* $\ker \boldsymbol{A}$ *замкнуто относительно линейных операций* и потому является линейным подпространством.

Если векторы $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ принадлежат множеству $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$, то существуют такие векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$. Но тогда, согласно условию а) определения 4.1,

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2),$$

т.е. вектор $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ является значением оператора $\boldsymbol{A}$ и, следовательно, принадлежит $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$. Аналогично вектор

$$\lambda\boldsymbol{y}_1 = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}_1)$$

также входит в множество $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Приходим к выводу, что и $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ является линейным подпространством, но уже в линейном пространстве $\mathcal{L}'$. ►

Размерности ядра и образа — важнейшие характеристики линейного оператора. Число $\dim(\ker \boldsymbol{A})$ называют ***дефектом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$, а число $\dim(\operatorname{im} \boldsymbol{A})$ — его ***рангом***. Отметим, что в примере 4.3 ядро оператора $\boldsymbol{A}$ имеет простую интерпретацию: это есть множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей A.

Среди линейных операторов, отображающих линейное пространство $\mathcal{L}$ в себя есть два важных частных случая: ***тождественный оператор*** $\boldsymbol{I}$, который каждый вектор переводит в себя ($\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$), и ***нулевой оператор*** $\boldsymbol{\Theta}$, который каждый вектор отображает в нулевой ($\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$). Эти два оператора являются предельными с точки зрения дефекта и ранга. Нулевой оператор имеет максимальный дефект (равный $\dim\mathcal{L}$) и минимальный ранг (нулевой). Тождественный оператор, наоборот, имеет минимальный дефект (нулевой) и максимальный ранг (равный $\dim\mathcal{L}$). Оператор максимального дефекта определен однозначно, а операторов минимального дефекта и максимального ранга бесконечно много.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ с нулевым дефектом является инъективным. В самом деле, если дефект оператора равен нулю, то ядро этого оператора содержит единственный вектор — нулевой. Если $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$. Значит, вектор $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ принадлежит ядру и потому является нулевым. Следовательно, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, т.е. различные векторы имеют в линейном пространстве $\mathcal{L}'$ различные образы. Наоборот, если оператор является инъективным, то в нулевой вектор линейного пространства $\mathcal{L}'$ может отображаться только нулевой вектор линейного пространства $\mathcal{L}$. Значит, ядро линейного оператора содержит только нулевой вектор и дефект линейного оператора равен нулю.

Дефект $d(\boldsymbol{A})$ и ранг $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A})$ оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ связаны с размерностью пространства $\mathcal{L}$ соотношением $d(\boldsymbol{A}) + \mathrm{Rg}(\boldsymbol{A}) = \dim\mathcal{L}$. Действительно, рассмотрим *прямое дополнение* $\mathcal{H}$ к линейному подпространству $\ker\boldsymbol{A}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Тогда $d(\boldsymbol{A}) + \dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}$, и нам достаточно показать, что $\dim\mathcal{H} = \dim\operatorname{im}\boldsymbol{A} = \mathrm{Rg}\,\boldsymbol{A}$. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ может рассматриваться как линейный оператор из линейного пространства $\mathcal{H}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$. Очевидно, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, лишь если $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Поэтому линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{H} \to \operatorname{im}\boldsymbol{A}$ на $\mathcal{H}$ имеет нулевой дефект и является сюръективным. Значит, он осуществляет биективное отображение линейного пространства $\mathcal{H}$ в линейное пространство $\operatorname{im}\boldsymbol{A}$. В следующем параграфе будет показано, что в этом случае размерности пространств $\mathcal{H}$ и $\operatorname{im}\boldsymbol{A}$ совпадают.

4.2. Изоморфизм линейных пространств

Определение 4.3. Два *линейных пространства* $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ называют ***изоморфными***, если существует *линейное биективное отображение* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$. При этом само отображение $\boldsymbol{A}$ называют ***изоморфизмом линейных пространств*** $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$.

Как следует из данного определения, изоморфизм представляет собой *линейный оператор* нулевого *дефекта* и максимального *ранга.* Примером изоморфизма линейного пространства в себя является *тождественный оператор.*

Теорема 4.2. Два *конечномерных линейных пространства* изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую *размерность.*

◄ Пусть линейные пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ имеют одинаковую размерность n. Мы докажем изоморфность этих линейных пространств, построив отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, являющееся изоморфизмом. Для этого выберем произвольные *базисы* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ и $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$ в линейном пространстве $\mathcal{L}'$. Любой *вектор* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ может быть *разложен в базисе* $\boldsymbol{b}$, т.е. представлен в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x$, где x — столбец *координат* этого *вектора* в базисе $\boldsymbol{b}$. Вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{e}x \in \mathcal{L}'$, который в базисе $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}'$ имеет те же координаты, что и вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Заданное таким образом отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ является линейным оператором. Действительно, если взять произвольные векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ со столбцами координат x, y, то

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}(x + y) = \boldsymbol{e}x + \boldsymbol{e}y = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

так как при *сложении векторов* их координаты складываются. Точно так же при *умножении вектора* $\boldsymbol{x}$ со столбцом координат x *на* произвольное *число* λ получаем

$$\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}(\lambda x) = \lambda(\boldsymbol{e}x) = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),$$

где опять-таки использованы правила умножения вектора на число в координатах.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ является *инъективным*, так как равенство $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Ay}$ означает, что $\boldsymbol{e}x = \boldsymbol{e}y$ или $x = y$ в силу единственности разложения вектора по базису. Поэтому $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ является *сюрьективным*, так как любой вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}'$ с координатами y в базисе $\boldsymbol{e}$ является образом вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}y$ с теми же координатами y, что и $\boldsymbol{y}$, но относительно „своего" базиса $\boldsymbol{b}$. Линейное, инъективное и сюрьективное отображение, по определению 4.3, и есть изоморфизм. Следовательно, линейные пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ изоморфны, при этом изоморфизмом является построенный нами линейный оператор $\boldsymbol{A}$.

Предположим теперь, что линейные пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ изоморфны и пусть отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ является соответствующим изоморфизмом. В *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ выберем некоторый базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ и докажем, что *система векторов* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{Ab}_1\ \ldots\ \boldsymbol{Ab}_n)$, состоящая из образов базисных векторов, является базисом в $\mathcal{L}'$.

Во-первых, система векторов $\boldsymbol{e}$ линейно независима. Возьмем произвольную *линейную комбинацию* этой системы векторов с некоторыми коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$ и приравняем *нулевому вектору* $\boldsymbol{0}'$ в $\mathcal{L}'$:

$$x_1\boldsymbol{Ab}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{Ab}_n = \boldsymbol{0}'.$$

Левая часть равенства является образом некоторого вектора $\boldsymbol{x}$:

$$x_1\boldsymbol{Ae}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{Ae}_n = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{Ax},$$

$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$, координатами которого в выбранном базисе $\boldsymbol{b}$ являются коэффициенты линейной комбинации. Так как отображение $\boldsymbol{A}$ инъективно, а нулевой вектор из $\mathcal{L}'$ является образом нулевого вектора из $\mathcal{L}$, заключаем, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, поскольку $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}'$. Итак,

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0},$$

а это возможно, лишь если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

Во-вторых, любой вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}'$ можно представить в виде линейной комбинации системы векторов $\boldsymbol{e}$. В самом деле, так как отображение $\boldsymbol{A}$ сюръективно, вектор $\boldsymbol{y}$ является образом некоторого вектора $\boldsymbol{x}$, имеющего в базисе $\boldsymbol{b}$ столбец координат x. Тогда

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n),$$

и мы получаем разложение $\boldsymbol{y}$ по системе векторов $\boldsymbol{e}$, коэффициентами в котором являются координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Система векторов $\boldsymbol{e}$ линейно независима, и в ней можно разложить любой вектор линейного пространства $\mathcal{L}'$. Значит, эта система является базисом в $\mathcal{L}'$. При этом количество векторов в $\boldsymbol{e}$ совпадает с количеством векторов в базисе $\boldsymbol{b}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, следовательно, размерности пространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают. ►

Следствие 4.1. Все n-мерные линейные пространства изоморфны *линейному арифметическому пространству* $\mathbb{R}^n$.

Построенный в доказательстве теоремы 4.2 изоморфизм связан с выбором базисов в линейных пространствах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Если в той или иной ситуации мы можем считать, что базис в линейном пространстве фиксирован, то вместо абстрактного n-мерного линейного пространства можно использовать „стандартное“ линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Все рассуждения и выкладки в линейном арифметическом пространстве носят более конкретный и интуитивно понятный характер. Но считать базис в линейном пространстве фиксированным не всегда приемлемо, поэтому нельзя считать идентичными произвольные n-мерные линейные пространства. Обычно отождествляют линейные пространства, между которыми существует „естественный“ изоморфизм, не связанный с выбором того или иного базиса. Например, как линейные пространства тождественны линейное пространство матриц типа $m \times n$

и линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^{mn}$, так как между ними возникает изоморфизм, если установить соответствие между элементами матрицы типа $m\times n$ и компонентами mn-мерного арифметического вектора. Точно так же можно не различать линейное пространство строк длины n и линейное пространство столбцов высоты n.

Указанное отождествление линейных пространств позволяет записывать векторы линейного арифметического пространства в зависимости от ситуации и как матрицы-строки, и как матрицы-столбцы. Напомним, что элементами n-мерного линейного арифметического пространства являются упорядоченные совокупности из n чисел. Порядок чисел в каждой такой совокупности можно задавать различными способами, и запись ее в строку или столбец — лишь две возможности из бесчисленного множества способов.

Пример 4.6. В линейном пространстве $K_3[x]$ многочленов переменного x степени не выше трех элементы 1, x, x^2, x^3 образуют базис. Этому базису соответствует изоморфизм между $K_3[x]$ и $\mathbb{R}^4$, при котором многочлену $a_0+a_1x+a_2x^2+$ $+a_3x^3$ сопоставляется арифметический вектор $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$.

4.3. Матрица линейного оператора

Пример 4.3 более глубок, чем это может показаться с первого взгляда. Фактически любой *линейный оператор* можно интерпретировать как линейный оператор, описанный в этом примере, т.е. действие линейного оператора сводится к умножению столбца координат вектора на матрицу. Поясним это подробнее.

Пусть задан линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, т.е. *линейное преобразование n-мерного линейного пространства* $\mathcal{L}$ в себя. Выберем *базис* $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ в $\mathcal{L}$. Действие линейного оператора полностью определено, если известны образы *векто-*

ров базиса. Действительно, если вектор $\boldsymbol{x}$ имеет *координаты* $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^{\text{т}}$, то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n),$$

т.е., зная векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$, мы можем найти образ любого вектора $\boldsymbol{x}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{b}$. Обозначим столбцы координат векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$ в базисе $\boldsymbol{b}$ через a_i, $a_i = (a_{1i} \ \dots \ a_{in})^{\text{т}}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}a_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определение 4.4. Матрицу $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \ \dots, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \dots \ \boldsymbol{b}_n)$ называют ***матрицей линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ является квадратной, ее порядок совпадает с *размерностью линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов и их матриц.

Пример 4.7. Матрицей *нулевого оператора* $\boldsymbol{\Theta}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ независимо от выбора базиса является нулевая матрица соответствующего типа. Действительно, образом любого вектора в случае нулевого оператора является *нулевой вектор*. Поэтому матрица нулевого оператора в любом базисе должна состоять из нулевых столбцов.

Пример 4.8. *Матрица тождественного оператора* $\boldsymbol{I}$ также не зависит от выбора базиса и в любом базисе является единичной. Действительно, взяв произвольный базис

$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \; \ldots \; \boldsymbol{b}_n)$, заключаем, что при $i = \overline{1, n}$

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где единица в последнем столбце стоит на i-м месте. Видно, что столбец координат вектора $\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}_i$ является i-м столбцом единичной матрицы.

Теорема 4.3. Пусть $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор. Тогда столбец y координат вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ равен произведению Ax матрицы A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ на столбец x координат вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе: $y = Ax$.

◄ Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$. Его образом будет вектор

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = \\ = x_1(a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{b}_n) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{b}_n) = \\ = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)\boldsymbol{b}_n. \end{aligned}$$

Столбец координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax. \qquad ►$$

Запись $y = Ax$ из формулировки теоремы 4.3 удобно называть матричной формой записи действия линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Замечание 4.1. Выкладки, приведенные в доказательстве теоремы, можно упростить, если использовать матричные обозначения и правила выполнения матричных операций. Полагая, что строка образов базисных векторов $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n)$ получается „умножением“ строки векторов $\boldsymbol{b}$ слева на оператор $\boldsymbol{A}$:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b},$$

получаем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{b}a_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}a_n) = \boldsymbol{b}(a_1\ \ldots\ a_n) = \boldsymbol{b}A,$$

так как $\boldsymbol{b}a_i$ — матричная запись *разложения вектора* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$ *по базису* $\boldsymbol{b}$, $i = \overline{1, n}$. Здесь мы использовали технику операций с *блочными матрицами*.

Взяв произвольный вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x$, получаем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}x) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})x = (\boldsymbol{b}A)x = \boldsymbol{b}(Ax).$$

Это означает, что столбец Ax является столбцом координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Пример 4.9. Рассмотрим отображение $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$, которое каждый вектор $\boldsymbol{x}$ преобразует в его векторное произведение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i}$ на *орт* $\boldsymbol{i}$ оси Ox. В силу свойств векторного произведения это отображение — линейный оператор. Найдем матрицу A этого линейного оператора в (правом) ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Для этого надо найти образы базисных векторов и разложить их по тому же базису. Поскольку $\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, то первый столбец в матрице A нулевой. Далее получаем второй столбец матрицы A:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 1\cdot\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Затем третий столбец:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на вектор $\boldsymbol{x}$ можно теперь записать как умножение столбца координат $(x\ \ y\ \ z)^{\mathrm{T}}$ вектора $\boldsymbol{x}$ слева на матрицу оператора:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}. \quad \#$$

Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. В то же время, какую бы квадратную матрицу порядка n мы ни взяли, она будет матрицей некоторого линейного оператора в заданном базисе n-мерного линейного пространства (см. пример 4.3). Таким образом, между линейными операторами, действующими в данном n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ и квадратными матрицами порядка n существует соответствие, которое является взаимно однозначным, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 4.4. Пусть $\boldsymbol{b}$ — произвольный базис в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Различным линейным операторам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, действующим в пространстве $\mathcal{L}$, соответствуют и различные матрицы в базисе $\boldsymbol{b}$. Любая квадратная матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного оператора, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

◄ Если матрицы A и B операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ совпадают, то, согласно теореме 4.3, для любого вектора $\boldsymbol{x}$ со столбцом координат x

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}Ax = \boldsymbol{b}Bx = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x},$$

т.е. образы произвольного вектора при двух отображениях совпадают. Следовательно, совпадают и сами отображения.

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная квадратная матрица порядка n. Определим отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ согласно формуле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}Ax$, где x — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$. Несложно проверить, что заданное таким образом отображение является линейным оператором. Действительно, для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ и любых действительных чисел λ, μ

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}A(\lambda x + \mu y) = \lambda(\boldsymbol{b}Ax) + \mu(\boldsymbol{b}Ay) = \lambda\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \mu\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}).$$

В этой выкладке мы использовали теорему 1.3 и свойства умножения матриц. Вычислив для $i = \overline{1, n}$ столбец координат образа i-го вектора из базиса $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{i-1,i} \\ a_{ii} \\ a_{i+1,i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

где единица стоит в i-й строке, убеждаемся, что он совпадает с i-м столбцом матрицы A и поэтому матрица заданного линейного оператора совпадает с исходной матрицей A. ►

Теорема 4.5. Ранг матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ совпадает с рангом этого оператора.

◄ *Образ* $\operatorname{im}\boldsymbol{A}$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ представляет собой *линейную оболочку системы векторов* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n$, где $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ — некоторый базис линейного пространства $\mathcal{L}$. Размерность линейного подпространства $\operatorname{im}\boldsymbol{A}$, представляющая собой ранг оператора, совпадает с максимальным количеством линейно независимых векторов в системе $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n$ и равна максимальному количеству линейно независимых столбцов в матрице A, составленной из столбцов координат этих векторов. Но матрица A является матрицей оператора $\boldsymbol{A}$. Значит, $\dim\operatorname{im}\boldsymbol{A}$ совпадает с рангом матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ в указанном базисе. Поскольку понятие ранга линейного оператора не зависит от выбора базиса, то и ранг его матрицы в любом базисе один и тот же. ►

Замечание 4.2. Связь между линейными операторами и матрицами, вскрытая доказанными теоремами, позволяет дать геометрическую интерпретацию системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Если СЛАУ записать в матричной форме $Ax = b$, то матрицу A можно связать с некоторым линейным оператором $\boldsymbol{A}$, а столбцы x и b интерпретировать как столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}$. Мы приходим к операторному уравнению, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, решение которого означает определение вектора $\boldsymbol{x}$ по его образу $\boldsymbol{b}$. В частном случае $b = 0$ СЛАУ однородна, а решение операторного уравнения означает определение *ядра оператора*. Отметим, что ***тривиальное решение*** $x = 0$ однородной СЛАУ $Ax = 0$ соответствует нулевому вектору, всегда входящему в ядро оператора.

4.4. Преобразование матрицы линейного оператора

Матрица линейного оператора изменяется, когда изменяется *базис линейного пространства*. Возникает естественный вопрос, как она изменяется. Напомним, что связь двух базисов, старого (исходного) и нового, отражается *матрицей перехода*.

Теорема 4.6. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, записанные в базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением

$$A_e = U^{-1} A_b U, \tag{4.2}$$

где $U = U_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{e}$.

◄ Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Обозначим *координаты векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ через x_b и y_b, а в новом базисе $\boldsymbol{e}$ — через x_e и y_e. Поскольку действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в матричной форме в базисе $\boldsymbol{b}$ имеет вид $y_b = A_b x_b$ (см. теорему 4.3), а координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в новом и старом базисах связаны между собой равенствами (см. **1.8**)

$$x_b = U x_e, \qquad y_b = U y_e,$$

то получаем

$$y_e = U^{-1} y_b = U^{-1}(A_b x_b) = U^{-1}(A_b U x_e) = \bigl(U^{-1} A_b U\bigr) x_e.$$

Равенство $y_e = \bigl(U^{-1} A_b U\bigr) x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и поэтому, согласно теореме 4.4, $U^{-1} A_b U = A_e$.

Изложенное доказательство теоремы хорошо иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} x_e & \xrightarrow{A_e} & y_e \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle U^{-1}} \\ x_b & \xrightarrow{A_b} & y_b \end{array} \qquad ►$$

Определение 4.5. Квадратные матрицы A и B порядка n называют ***подобными***, если существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1}AP = B$.

Формула (4.2) означает, что матрицы, представляющие один и тот же линейный оператор в разных базисах, являются подобными. Верно также и обратное: если две матрицы A и B подобны, т.е. $B = P^{-1}AP$, то их можно рассматривать как матрицы одного оператора, но в разных базисах. Действительно, в произвольном *n-мерном линейном пространстве* зафиксируем произвольный базис $\boldsymbol{b}$ и выберем линейный оператор, который в этом базисе имеет матрицу A. Тогда в базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}P$ этот же оператор будет иметь матрицу $P^{-1}AP = B$.

Теорема 4.7. Если матрицы A и B подобны, то $\det A = \det B$.

◄ Если матрицы A и B подобны, то, согласно определению 4.5, существует такая невырожденная матрица P, что $B = P^{-1}AP$. Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, а $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$ [III], то получаем

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det A \det P = \det A. \qquad ►$$

Следствие 4.2. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

◄ Действительно, возьмем матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в двух различных базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$. Согласно теореме 4.6 и определению 4.5 эти матрицы подобны. Поэтому $\det A_b = \det A_e$ по теореме 4.7. ►

Следствие говорит о том, что, хотя матрица линейного оператора и изменяется при замене базиса, определитель ее при этом остается неизменным. Значит, этот определитель характеризует не конкретную матрицу оператора в конкретном базисе, а сам оператор. Это позволяет ввести следующее понятие.

Определение 4.6. ***Определителем линейного оператора*** называют определитель его матрицы в каком-либо базисе.

Пример 4.10. Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$, определяемый формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i}$, в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(см. пример 4.9). Определитель этой матрицы равен нулю. Значит, и в любом другом базисе определитель матрицы этого линейного оператора равен нулю.

4.5. Произведение линейных операторов

Пусть в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ действуют два *линейных оператора* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Рассмотрим отображение $\boldsymbol{BA}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, которое является композицией двух отображений и задается формулой $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})$. Это *отображение* является *линейным*, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и любых действительных λ и μ

$$(\boldsymbol{BA})(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{Ax}+\mu\boldsymbol{Ay}) = \\ = \lambda\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})+\mu\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ay}) = \lambda(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x}+\mu(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{y}.$$

Введенный нами линейный оператор $\boldsymbol{BA}$ называют ***произведением линейных операторов*** $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$.

Теорема 4.8. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ действуют линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а A и B — *матрицы* этих *линейных операторов* в некотором *базисе* $\boldsymbol{b}$. Тогда матрицей линейного оператора $\boldsymbol{BA}$ в том же базисе $\boldsymbol{b}$ является матрица BA.

◀ Действие линейного оператора на вектор в данном базисе представляется как умножение матрицы этого оператора на столбец координат вектора. Поэтому для произведения двух операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ получаем

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}Ax) = \boldsymbol{b}(B(Ax)) = \boldsymbol{b}(BA)x. \qquad ▶$$

Если линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ представляет собой *биективное отображение*, то существует обратное отображение $\boldsymbol{A}^{-1}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$.

Теорема 4.9. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратное отображение $\boldsymbol{A}^{-1}$, то это отображение линейно, причем если матрицей $\boldsymbol{A}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$ является A, то матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ в том же базисе является A^{-1}.

◀ Любым векторам $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ линейного пространства $\mathcal{L}$ соответствуют такие однозначно определенные векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, что

$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, 2$. При этом для любых действительных λ и μ вектору $\lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2$ соответствует вектор $\lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2$, так как

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2) = \lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2 = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_2.$$

Следовательно, отображение $\boldsymbol{A}^{-1}$ линейно.

Отметим, что произведение операторов $\boldsymbol{A}^{-1}$ и $\boldsymbol{A}$, как композиция прямого и обратного отображений, является *тождественным оператором.* Согласно теореме 4.8, произведение матриц A' и A этих операторов равно единичной матрице E: $A'A = E$. Это значит, что матрица A' оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ является обратной к матрице A оператора $\boldsymbol{A}$: $A' = A^{-1}$. ▶

Замечание 4.3. Для любых двух линейных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, действующих в линейном пространстве $\mathcal{L}$, выполняется соотношение

$$\operatorname{Rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \min\{\operatorname{Rg}\boldsymbol{A}, \operatorname{Rg}\boldsymbol{B}\}.$$

Действительно, рассмотрим оператор $\boldsymbol{A}$ как линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \operatorname{im}\boldsymbol{B} \to \mathcal{L}$. Размерность образа оператора, т.е. его ранг, не превосходит размерности линейного пространства, из которого он действует, так как сумма дефекта и ранга совпадает с размерностью этого пространства (см. **4.1**). В нашем случае имеем

$$\operatorname{Rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \dim\operatorname{im}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \dim\operatorname{im}\boldsymbol{B} = \operatorname{Rg}\boldsymbol{B}.$$

Так как образ линейного оператора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ является линейным подпространством образа линейного оператора $\boldsymbol{A}$, то

$$\operatorname{Rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{Rg}\boldsymbol{A}.$$

Доказанное соотношение можно перенести на квадратные матрицы с помощью теорем 4.5 и 4.4. В результате получаем, что ранг произведения матриц AB не превосходит

$\min\{\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B\}$. Особо отметим случай, когда одна из матриц, например B, является невырожденной. Тогда $\operatorname{Rg}(AB) \leqslant \operatorname{Rg} A$ и одновременно $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}((AB)B^{-1}) \leqslant \operatorname{Rg}(AB)$. Следовательно, при умножении матрицы A справа на невырожденную матрицу ее ранг не изменяется. При умножении матрицы A слева на невырожденную матрицу ранг также не изменяется, что доказывается аналогично.

4.6. Линейные пространства линейных операторов

Обозначим через $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ множество всех *линейных операторов*, действующих из *линейного пространства* $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$. В этом множестве введем операции ***сложения линейных операторов*** и ***умножения линейного оператора на действительное число. Суммой линейных операторов*** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ назовем оператор $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, определяемый формулой

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{L},$$

а ***произведением линейного оператора*** $\boldsymbol{A} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ ***на действительное число*** λ назовем оператор $\lambda\boldsymbol{A} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, действующий согласно формуле

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{B}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \\ = (\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + (\alpha\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = \\ = \alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = \\ = \alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} + \beta(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

и

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}) = \lambda\big(\boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y})\big) = \lambda\big(\boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}(\beta \boldsymbol{y})\big) = \\ = (\lambda\alpha)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+(\lambda\beta)\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\alpha\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+(\beta\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \\ = \alpha(\lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})+\beta(\lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \alpha((\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{x})+\beta((\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{y}),$$

отображения $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и $\lambda\boldsymbol{A}$ действительно являются линейными операторами. Таким образом, *относительно* введенных нами *операций множество* $L(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ *замкнуто.* Проверив *аксиомы линейного пространства*, можно убедиться, что $L(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ относительно этих операций является линейным пространством.

Для каждого линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ определен линейный оператор $(-\boldsymbol{A})$, задаваемый равенством $(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$. Нетрудно проверить, что $(-\boldsymbol{A})$ действительно линейный оператор:

$$(-\boldsymbol{A})(\lambda \boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{y})) = -(\lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \\ = \lambda(-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}))+\mu(-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})) = \lambda((-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x})+\mu((-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}).$$

В сумме с $\boldsymbol{A}$ линейный оператор $(-\boldsymbol{A})$ дает *нулевой оператор.* Поэтому в соответствии с терминологией линейных пространств $(-\boldsymbol{A})$ называют ***оператором, противоположным*** к $\boldsymbol{A}$.

Линейное пространство $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ линейных операторов из линейного пространства $\mathcal{L}$ в себя называют ***линейным пространством линейных операторов (преобразований)*** пространства $\mathcal{L}$.

Каждому линейному оператору $\boldsymbol{A}\in L(\mathcal{L},\mathcal{L})$, действующему в *n-мерном* линейном пространстве $\mathcal{L}$, в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ соответствует квадратная матрица A порядка n (*матрица этого линейного оператора*). Тем самым определено отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L})\to M_n(\mathbb{R})$ из линейного пространства $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в линейное пространство $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n с действительными коэффициентами, при этом $\Phi(\boldsymbol{A}) = A$. Согласно теореме 4.4 *отображение* Φ является *биективным.*

Теорема 4.10. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан некоторый базис $\boldsymbol{b}$. Тогда отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L}) \to \to M_n(\mathbb{R})$, сопоставляющее каждому линейному оператору его матрицу в базисе $\boldsymbol{b}$, является *изоморфизмом линейных пространств* $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ и $M_n(\mathbb{R})$.

◀ Как мы уже отметили, *отображение* Φ биективно, и нам остается показать, что оно *линейно*. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два произвольных линейных оператора из линейного пространства $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$. Тогда для любого *вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ со столбцом *координат* x

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}Ax + \boldsymbol{b}Bx = \boldsymbol{b}\big((A+B)x\big),$$

где A и B — матрицы операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Итак, действие линейного оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ записывается как умножение столбца координат вектора слева на матрицу $A+B$. Значит, $A+B$ и является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

Итак, *сложению линейных операторов* при отображении Φ соответствует сложение их матриц. Аналогично *умножению линейного оператора на действительное число* λ соответствует умножение его матрицы на это число:

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{b}Ax) = \boldsymbol{b}\big((\lambda A)x\big).$$

Условия а), б) определения 4.1 выполнены, поэтому отображение Φ линейно ▶

Следствие 4.3. Если матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ являются матрицами линейных операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в некотором базисе $\boldsymbol{b}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, то для любых чисел λ и μ матрица $\lambda A + \mu B$ является матрицей линейного оператора $\lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в том же базисе $\boldsymbol{b}$.

◀ Эта формулировка лишь перефразирует утверждение, что отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L}) \to M_n(\mathbb{R})$ является линейным, что доказано в теореме 4.10. ▶

Вопросы и задачи

4.1. Выясните, являются ли линейными следующие отображения пространства V_3: а) $\boldsymbol{x} \to 3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$; б) ортогональная проекция на плоскость xOy; в) $\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — фиксированные векторы пространства V_3.

4.2. Выясните, являются ли линейными следующие отображения линейного пространства всех многочленов от переменной t в себя:

а) умножение многочлена на t;

б) умножение многочлена на t^2;

в) дифференцирование многочлена.

4.3. Будет ли линейным отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, если: а) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (\sin x_1,\ 0,\ x_3)$; б) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_3,\ 2x_2 + x_3,\ -x_1)$, где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$.

4.4. Покажите, что линейным оператором является отображение $\boldsymbol{A}$, которое каждый вектор $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$, заданный в линейном пространстве $\mathcal{L}$ своими координатами относительно базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{e}_n)$, отображает в вектор $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m$, где $m < n$ (оператор проектирования на подпространство $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m\}$). Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}$.

4.5. Запишите в заданном базисе матрицу следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве V_3:

а) оператора проектирования на плоскость xOy, базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$;

б) оператора проектирования на ось Oy, базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$;

в) оператора проектирования на плоскость xOy, базис $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

4.6. В пространстве V_3 задан вектор $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Докажите, что отображение $\boldsymbol{A}$, определяемое условием $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}$, является линейным. Найдите его матрицу в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

4.7. В линейном пространстве $K_n[x]$ многочленов переменного x степени не выше n задан линейный оператор дифференцирования $\boldsymbol{D}[P(x)] = P'(x)$. Запишите матрицу этого оператора в базисе

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = x, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{x^2}{2!}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \frac{x^n}{n!}.$$

4.8. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ — линейные пространства. Какому линейному пространству изоморфно пространство $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$? Чему равна размерность пространства $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$?

4.9. Определите, какие из следующих отображений $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ являются линейными:

а) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 1,\ x_2,\ x_3 + 3)$;

б) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \bigl(x_1^2,\ 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_2\bigr)$;

в) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$;

г) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \bigl(x^2 + x_3,\ x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3\bigr)$,

если $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Для линейных операторов найти матрицы в базисе, в котором заданы векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$.

4.10. Рассмотрим линейное пространство всех матриц второго порядка. Покажите, что умножение справа любой матрицы этого пространства на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

есть линейный оператор. Найдите матрицу этого оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.11. Покажите, что в линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ соответственно в векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, и найдите матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты указанных векторов:

$$\text{а)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.12. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3\ \ \boldsymbol{e}_4)$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе:

а) $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1$;

б) $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$;

в) $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{e}_4$.

4.13. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе $(\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)$ поменять местами два вектора $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_j$?

4.14. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$.

4.15. Линейный оператор $\boldsymbol{A} \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ в базисе

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 18 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.16. Найдите матрицу линейного оператора дифференцирования, действующего в линейном пространстве многочленов степени не выше двух, в базисе $\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_2 = x$, $\boldsymbol{e}_3 = x^2$. Используя матрицу перехода, найдите матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{f}_1 = 1$, $\boldsymbol{f}_2 = x - 1$, $\boldsymbol{f}_3 = (x-1)^2/2$.

5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

5.1. Характеристическое уравнение матрицы

Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n рассмотрим определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

где E — единичная матрица, а λ — действительное переменное. Относительно переменного λ этот определитель является многочленом степени n и может быть записан в виде

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \lambda^k, \qquad (5.1)$$

где множители $(-1)^k$ введены для удобства.

Определение 5.1. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическим многочленом матрицы*** A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — ***характеристическим уравнением матрицы*** A.

Пример 5.1. Найдем характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для этого раскроем определитель:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (7-\lambda)\big((1-\lambda)(4-\lambda)-9\big) = -\lambda^3+12\lambda^2-30\lambda-35.$$

Итак, характеристическое уравнение заданной матрицы имеет вид $-\lambda^3+12\lambda^2-30\lambda-35=0$. #

Квадратную матрицу можно использовать в качестве значения переменного в произвольном многочлене. Тогда значением многочлена от матрицы будет матрица того же порядка, что и исходная [III]. Интерес представляют такие многочлены, значение которых от данной матрицы есть нулевая матрица. Их называют аннулирующими многочленами. Оказывается, что одним из таких аннулирующих многочленов для матрицы является ее характеристический многочлен.

Теорема 5.1 (*теорема Кэли — Гамильтона*). Для любой квадратной матрицы характеристический многочлен является ее аннулирующим многочленом. #

Выясним, как связаны между собой характеристические многочлены *подобных матриц*.

Теорема 5.2. Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.

◄ Пусть квадратные матрицы A и A' одного порядка подобны, т.е. существует такая невырожденная матрица P того же порядка, что $A' = P^{-1}AP$. Тогда в силу свойств определителей [III] имеем

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A'-\lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) =$$
$$= \det\big(P^{-1}(A-\lambda E)P\big) = \det P^{-1}\det(A-\lambda E)\det P =$$
$$= \det(A-\lambda E) = \chi_A(\lambda). \quad ►$$

5.2. Характеристическое уравнение линейного оператора

Рассмотрим *линейный оператор* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$. Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый *базис* $\boldsymbol{b}$ и запишем в этом базисе *матрицу* $A = (a_{ij})$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$. Согласно следствию 4.3 матрица $A - \lambda E$ является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ — *тождественный оператор*. Определитель $\det(A - \lambda E)$ матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$, согласно следствию 4.2, от выбора базиса не зависит. Значит, *характеристический многочлен* $\chi_A(\lambda)$ матрицы A является также характеристическим многочленом любой другой матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ и совпадает с *определителем линейного оператора* $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$. Мы можем ввести следующее определение.

Определение 5.2. ***Характеристическим многочленом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называют *характеристический многочлен* его *матрицы* A, записанной в некотором базисе, а ***характеристическим уравнением*** этого ***оператора*** — *характеристическое уравнение матрицы* A.

Определение корректно, так как характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. При этом коэффициенты d_k характеристического многочлена, представленного в виде (5.1), также не связаны с используемым базисом, т.е. являются ***инвариантами*** относительно выбора базиса. Другими словами, коэффициенты d_k отражают свойства самого оператора, а не его матрицы A, являющейся записью оператора в конкретном базисе.

Коэффициенты d_k могут быть выражены в виде многочленов от элементов матрицы оператора. Таким образом, хотя коэффициенты матрицы меняются при замене базиса, некоторые выражения от этих коэффициентов остаются неизменными. Наиболее просто выражается коэффициент

$$d_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

равный сумме диагональных элементов матрицы A. Этот коэффициент называют ***следом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ (***следом матрицы*** A) и обозначают $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ ($\operatorname{tr}A$) или $\operatorname{sp}\boldsymbol{A}$ ($\operatorname{sp}A$). Коэффициент d_0 характеристического многочлена совпадает со значением этого многочлена при $\lambda=0$ и равен определителю линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

Пример 5.2. В линейном пространстве $K_2[x]$ многочленов степени не выше двух элементы 1, x, x^2 образуют базис. Матрица A линейного оператора дифференцирования в этом базисе имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Вычислив определитель

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&2\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

и приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение этого линейного оператора: $\lambda^3=0$.

5.3. Собственные векторы линейного оператора

Определение 5.3. *Ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}$ *в линейном пространстве* $\mathcal{L}$ называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. При этом число λ называют ***собственным значением*** (***собственным числом***) ***линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$.

Пример 5.3. В линейном пространстве $K_n[x]$ многочленов степени не выше n содержатся многочлены нулевой степени, т.е. постоянные функции. Так как $\dfrac{dc}{dx}=0=0\cdot c$, многочлены нулевой степени $p(x) = c \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора дифференцирования, а число $\lambda = 0$ — собственным значением этого оператора. #

Множество всех собственных значений линейного оператора называют ***спектром линейного оператора***. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением. Действительно, если вектор $\boldsymbol{x}$ одновременно удовлетворяет двум равенствам $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{Ax} = \mu\boldsymbol{x}$, то $\lambda\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$, откуда $(\lambda - \mu)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Если $\lambda - \mu \neq 0$, умножим равенство на число $(\lambda - \mu)^{-1}$ и в результате получим, что $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Но это противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой.

Каждому собственному значению отвечают свои собственные векторы, причем таких бесконечно много. Действительно, если $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор линейного оператора $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ, т.е. $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, то для любого ненулевого действительного числа α имеем $\alpha\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{Ax}) = \alpha\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(\alpha\boldsymbol{x})$. Значит, и вектор $\alpha\boldsymbol{x}$ является для линейного оператора собственным.

Замечание 5.1. Часто говорят о ***собственных значениях*** (***числах***), ***спектре*** и ***собственных векторах квадратной матрицы***. При этом имеют в виду следующее. Матрица A порядка n является *матрицей* некоторого *линейного оператора* в фиксированном *базисе*, действующего в *n-мерном линейном пространстве*. Например, если остановиться на *стандартном базисе* в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$, то матрица A определяет линейный оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ со столбцом координат x в вектор со столбцом координат Ax. Матрицей $\boldsymbol{A}$ как раз и является матрица A. Естественно отождествить оператор с его матрицей аналогично тому, как арифметический вектор отождествляется со столбцом своих координат. Такое отождествление, которое часто используется и при этом не всегда оговаривается, позволяет перенести на матрицы „операторные“ термины.

Спектр линейного оператора тесно связан с его *характеристическим уравнением.*

Теорема 5.3. Для того чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.

◄ Необходимость. Пусть число λ является собственным значением линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Это значит, что существует вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, для которого

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{5.2}$$

Отметим, что в $\mathcal{L}$ действует *тождественный оператор* $\boldsymbol{I}$: $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$. Используя этот оператор, преобразуем равенство (5.2): $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$, или

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{5.3}$$

Запишем векторное равенство (5.3) в каком-либо базисе $\boldsymbol{b}$. Матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ будет матрица $A - \lambda E$, где A — матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$, а E — единичная матрица, и пусть x — столбец координат собственного вектора $\boldsymbol{x}$. Тогда $x \neq 0$, а векторное равенство (5.3) равносильно матричному

$$(A - \lambda E)x = 0, \tag{5.4}$$

которое представляет собой матричную форму записи однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей $A - \lambda E$ порядка n. Эта система имеет ненулевое решение, являющееся столбцом координат x собственного вектора $\boldsymbol{x}$. Поэтому матрица $A - \lambda E$ системы (5.4) имеет нулевой определитель [III], т.е. $\det(A - \lambda E) = 0$. А это означает, что λ является корнем характеристического уравнения линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

Достаточность. Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. Если λ является корнем характеристического уравнения, то в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ выполняется равенство $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, матрица однородной СЛАУ (5.4), записанной в матричной форме, вырождена, и система имеет ненулевое решение x. Это ненулевое решение представляет собой набор координат в базисе $\boldsymbol{b}$ некоторого ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$, для которого выполняется векторное равенство (5.3) или ему эквивалентное равенство (5.2). Мы приходим к выводу, что число λ является собственным значением линейного оператора $\boldsymbol{A}$. ►

Каждому собственному значению λ матрицы (линейного оператора) сопоставляют его ***кратность***, полагая ее равной кратности корня λ характеристического уравнения этой матрицы (этого линейного оператора).

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является *линейным подпространством*, так как это множество не содержит *нулевого вектора*, который, по определению, не может быть собственным. Но это формальное и легко устранимое препятствие является единственным. Обозначим через $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ множество всех собственных векторов линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, отвечающих собственному значению λ, с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

Теорема 5.4. Множество $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$.

◄ Выберем произвольные два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ и докажем, что для любых действительных α и β вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ также принадлежит $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. Для этого вычислим образ этого вектора под действием линейного оператора $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} =$$

$$= \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) + \beta(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}) + \lambda(\beta\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}).$$

Таким образом, для вектора $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ выполняется соотношение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$. Если $\boldsymbol{z}$ — нулевой вектор, то он принадлежит $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. Если же он ненулевой, то, согласно доказанному соотношению, он является собственным с собственным значением λ и опять-таки принадлежит множеству $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. ►

Линейное подпространство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ иногда называют ***собственным подпространством линейного оператора****. Оно является частным случаем ***инвариантного подпространства*** линейного оператора $\boldsymbol{A}$ — такого линейного подпространства $\mathcal{H}$, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ вектор $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ также принадлежит $\mathcal{H}$.

Инвариантным подпространством линейного оператора является также линейная оболочка любой системы его собственных векторов. Инвариантным подпространством линейного оператора, не связанным с его собственными векторами, является *образ оператора*.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ можно рассматривать как *линейное отображение* любого своего инвариантного пространства $\mathcal{H}$ в себя. Такое отображение, по сути, есть результат *сужения отображения* $\boldsymbol{A}$ на линейное подпространство $\mathcal{H}$, и его называют ***ограничением линейного оператора*** на инвариантное подпространство $\mathcal{H}$.

5.4. Вычисление собственных значений и собственных векторов

Характеристическое уравнение линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующего в *$n$-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$, — это алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами. Среди его корней могут быть комплексные числа, но эти корни не относят к *собственным значениям линейного оператора*, так как, согласно определению,

*Не следует путать два термина: *собственное подпространство* и *собственное подпространство линейного оператора*.

собственное значение линейного оператора — действительное число. Чтобы комплексные корни характеристического уравнения можно было рассматривать как собственные значения линейного оператора, в линейном пространстве должно быть определено умножение вектора на любые комплексные числа.

Как следует из доказательства теоремы 5.3, чтобы вычислить собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$ и найти его *собственные векторы*, нужно выполнить следующие операции:

– выбрать в линейном пространстве *базис* и сопоставить $\boldsymbol{A}$ *матрицу* A этого *линейного оператора* в выбранном базисе;

– составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни λ_k, которые и будут собственными значениями линейного оператора;

– для каждого собственного значения λ_k найти *фундаментальную систему решений* для однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(A - \lambda_k E)x = 0$. Столбцы фундаментальной системы решений представляют собой координаты векторов некоторого базиса в *собственном подпространстве* $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_k)$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$.

Любой собственный вектор с собственным значением λ_k принадлежит подпространству $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_k)$, и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с собственным значением λ_k.

Пример 5.4. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с описанной процедурой необходимо выполнить три действия. Первое действие можно опустить, так как оператор уже представлен своей матрицей в некотором базисе. Выполняем дальнейшие действия.

2) Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

3) Находим столбцы координат собственных векторов, решая для каждого из трех собственных значений однородную СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

3а) Для $\lambda = \lambda_1 = -3$ система (5.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 2:

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Поэтому размерность линейного пространства решений системы равна $3 - 2 = 1$. Фундаментальная система решений содержит одно решение, например

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов линейного оператора с собственным значением $\lambda_1 = -3$ в координатной форме имеет вид

$$\alpha x^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где α — произвольное ненулевое действительное число.

3б) При $\lambda = \lambda_2 = 1$ система (5.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Как и в предыдущем случае, размерность линейного пространства решений равна $2 - 1 = 1$ и фундаментальная система решений содержит одно решение. Выберем следующее:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов с собственным значением $\lambda = -1$ в координатной форме имеет вид

$$\beta x^{(2)} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где β — произвольное ненулевое действительное число.

3в) Для $\lambda = \lambda_3 = 3$ аналогично предыдущим двум случаям находим столбец координат одного из собственных векторов, например

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

который порождает собственное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающее собственному значению $\lambda = 3$.

Пример 5.5. Найдем собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в *n-мерном линейном пространстве*, *матрица* A которого в некотором базисе является верхней треугольной порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем все ее диагональные элементы a_{ii} попарно различны, т.е. $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i \neq j$.

Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

(определитель верхней треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов). Находим все действительные корни этого уравнения:

$$\lambda_k = a_{kk}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Как видим, линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет n попарно различных собственных значений.

Отметим, что пересечение любых двух *собственных подпространств линейного оператора* содержит лишь *нулевой вектор*, так как собственный вектор не может отвечать двум различным собственным значениям. Поэтому собственные подпространства линейного оператора образуют *прямую сумму*, а *размерность* прямой суммы линейных подпространств, согласно следствию из теоремы 2.5, равна сумме их размерностей. Из этих соображений следует, что каждое из n собственных подпространств рассматриваемого линейного оператора является одномерным, так как их размерность не может быть меньше, но если бы одно из подпространств имело размерность больше единицы, то суммарная их размерность превышала бы размерность самого линейного пространства.

Итак, все собственные подпространства линейного оператора в нашем случае одномерны. Рассмотрим то из них, которое отвечает собственному значению $\lambda_r = a_{rr}$, где $1 \leqslant r \leqslant n$. Соответствующий собственный вектор имеет столбец координат, который является ненулевым решением однородной СЛАУ

$$(A - a_{rr}E)x = 0. \tag{5.6}$$

Достаточно очевидно, что ранг матрицы системы (5.6) равен $n-1$, а базисный минор для этой матрицы получается вычеркиванием r-й строки и r-го столбца.

Наиболее просто решение системы (5.6) выглядит для $r = 1$. В этом случае собственным является вектор $\boldsymbol{x}_1$ со столбцом координат $(1\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)^{\mathrm{т}}$. При $r = 2$ все координаты собственного вектора, начиная с третьей, будут равны нулю, так как они удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} a_{33}-a_{22} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & a_{44}-a_{22} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

получающейся отбрасыванием в исходной системе первых двух уравнений. Второе из отбрасываемых уравнений вытекает из всех последующих и может быть опущено, а первое определяет связь между первыми двумя координатами. Мы заключаем, что собственному значению a_{22} отвечает вектор $\boldsymbol{x}_2$ со столбцом координат $(-a_{12}\ \ a_{11}-a_{22}\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)^{\mathrm{т}}$. Собственному значению a_{33} отвечает вектор $\boldsymbol{x}_3$ со столбцом координат $(x_{13}\ \ x_{23}\ \ x_{33}\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)^{\mathrm{т}}$, у которого лишь первые три координаты отличны от нуля. Эти три координаты удовлетворяют однородной системе из двух уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-a_{33})x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33}=0, \\ \qquad\qquad (a_{22}-a_{33})x_{23}+a_{33}x_{33}=0. \end{cases}$$

Эти рассуждения можно продолжить.

Пример 5.6. Преобразование поворота в V_3 на заданный острый угол вокруг некоторой оси — это линейный оператор. Его собственными векторами являются векторы, коллинеарные оси поворота. Например, если поворот выполняется вокруг оси Oz, то матрица оператора в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а его собственными векторами будут векторы со столбцами координат вида $\lambda(0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda\neq 0$.

5.5. Свойства собственных векторов

Теорема 5.5. Пусть *собственные значения* λ_1, ..., λ_r *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ попарно различны. Тогда *система* соответствующих им *собственных векторов* $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_r$ *линейно независима.*

◄ Доказательство опирается на метод математической индукции, проводимый по количеству r векторов в системе. При $r=1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот *вектор ненулевой*, а собственный вектор, согласно определению 5.3, является ненулевым.

Пусть утверждение верно при $r=m$, т.е. для произвольной системы из m собственных векторов $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_m$. Добавим к системе векторов еще один собственный вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$, отвечающий собственному значению λ_{m+1}, и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы собственных векторов и предположим, что она равна *нулевому вектору*:

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} = \boldsymbol{0}. \tag{5.7}$$

К равенству (5.7) применим линейный оператор $\boldsymbol{A}$ и в результате получим еще одно векторное равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{m+1} = \boldsymbol{0}.$$

Учтем, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_{m+1}$ являются собственными:

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m \boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} = \boldsymbol{0}. \tag{5.8}$$

Умножив равенство (5.7) на коэффициент λ_{m+1} и вычтя его из равенства (5.8), получим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, равную нулевому вектору:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}.$$

Вспоминая, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, по предположению, линейно независима, делаем вывод, что у полученной линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{5.9}$$

Поскольку все собственные значения λ_i попарно различны, то из равенств (5.9) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Значит соотношение (5.7) можно записать в виде $\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \boldsymbol{0}$, а так как вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$ ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$. В итоге получаем, что равенство (5.7) выполняется лишь в случае, когда все коэффициенты α_i, $i = \overline{1, m+1}$, равны нулю. Тем самым мы доказали, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}$ линейно независима. ▶

Теорема 5.6. *Матрица линейного оператора* $\boldsymbol{A}$, действующего в *линейном пространстве*, в данном *базисе* является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными для оператора $\boldsymbol{A}$.

◀ Пусть A — матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$. Согласно определению 4.4, j-м столбцом матрицы A является столбец координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$.

Если матрица A является диагональной, то произвольно взятый ее j-й столбец имеет вид $(0 \ \ldots \ 0 \ \mu_j \ 0 \ \ldots \ 0)^{\mathrm{T}}$ (единственный ненулевой элемент может стоять на j-м месте). Для вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$ получаем представление

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}(0 \ \ldots \ 0 \ \mu_j \ 0 \ \ldots \ 0)^{\mathrm{T}} = \mu_j \boldsymbol{b}_j,$$

которое как раз и означает, что вектор $\boldsymbol{b}_j$ является собственным с собственным значением μ_j. Значит, все базисные векторы являются собственными, а все диагональные элементы матрицы A являются собственными значениями.

Верно и обратное. Если каждый вектор $\boldsymbol{b}_j$ является собственным для линейного оператора $\boldsymbol{A}$ и ему отвечает собственное значение λ_j, то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j = \lambda_j \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}(0 \ \ldots \ 0 \ \lambda_j \ 0 \ \ldots \ 0)^{\mathrm{T}},$$

т.е. в матрице оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе равны нулю все элементы, кроме диагональных, а диагональный элемент в j-м столбце равен λ_j. ▶

Следствие 5.1. Если *характеристическое уравнение линейного оператора*, действующего в *n-мерном линейном пространстве*, имеет n попарно различных действительных корней, то существует базис, в котором матрица этого оператора является диагональной.

◀ Каждый действительный корень характеристического уравнения является собственным значением линейного оператора.

Каждому из таких корней можно сопоставить хотя бы по одному собственному вектору. Система выбранных таким образом векторов, согласно теореме 5.5, является линейно независимой, а так как количество n векторов в ней равно *размерности* линейного пространства, она является базисом. Этот базис состоит из собственных векторов. Согласно теореме 5.6, матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид. ►

Следствие 5.2. Если характеристическое уравнение квадратной матрицы порядка n имеет n попарно различных действительных корней, то эта *матрица подобна* некоторой диагональной.

◄ Пусть матрица A порядка n имеет n различных действительных корней. Выберем произвольное n-мерное линейное пространство $\mathcal{L}$, зафиксируем в нем некоторый базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ и рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{A}$, матрицей которого в базисе $\boldsymbol{b}$ является матрица A. По теореме 5.6 существует базис, в котором матрица A' этого оператора диагональна. Согласно теореме 4.6, матрицы A и A' подобны. Отметим, что на диагонали матрицы A' стоят все попарно различные собственные значения матрицы A. ►

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные действительные корни, то такой линейный оператор может иметь диагональную матрицу в некотором базисе, но так бывает не всегда.

Пример 5.7. В двумерном линейном пространстве (например, в $\mathbb{R}^2$) рассмотрим линейные операторы, матрицы которых в некотором базисе имеют вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристические уравнения этих операторов совпадают и имеют вид $(\lambda - 2)^2 = 0$. Поэтому оба оператора имеют единственное *собственное значение* $\lambda = 2$ *кратности* 2. Матрица первого линейного оператора уже имеет диагональный вид, т.е. исходный базис состоит из собственных векторов этого оператора. Можно показать, что любой ненулевой вектор для этого оператора является собственным и потому для него любой базис есть базис из собственных векторов. У второго линейного оператора все собственные векторы отвечают собственному значению 2, но *собственное подпространство линейного оператора* для этого собственного значения одномерно. Следовательно, найти два линейно независимых собственных вектора для этого линейного оператора невозможно и базиса из собственных векторов не существует. #

При изучении заданного линейного оператора появляется мысль выбрать такой базис, в котором его матрица выглядит наиболее просто. Из вышеизложенного следует, что в определенных ситуациях линейный оператор в некотором базисе имеет диагональную матрицу. Чтобы это было так, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Изменение базиса вызывает замену матрицы оператора подобной ей. Замену матрицы A диагональной матрицей A', подобной A, называют ***приведением матрицы A к диагональному виду***.

Задача приведения матрицы к диагональному виду может рассматриваться самостоятельно, вне зависимости от изучения конкретного линейного оператора. Она состоит в подборе для данной матрицы A такой невырожденной матрицы P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной.

Пример 5.8. Выясним, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найдем соответствующую диагональную матрицу и матрицу P преобразования подобия.

Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, находим его корни: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Видим, что имеются два собственных значения, причем одно из них кратности 2.

Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств (в данном случае матрицы, см. замечание 5.1) равна размерности линейного пространства, в нашем случае — трем. Отметим без доказательства, что размерность собственного подпространства линейного оператора (матрицы) не превышает кратности соответствующего собственного значения. Проверим это на собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_1, для чего вычислим ранг матрицы $A-\lambda_1 E$:

$$\mathrm{Rg}(A-\lambda_1 E)=\mathrm{Rg}\begin{vmatrix}8 & -12 & 6\\ 10 & -18 & 10\\ 12 & -24 & 14\end{vmatrix}=2.$$

Значит, размерность первого собственного подпространства равна $3-2=1$.

Аналогично находим размерность второго собственного подпространства. Вычисляем ранг соответствующей матрицы $A-\lambda_2 E$:

$$\mathrm{Rg}(A-\lambda_2 E)=\mathrm{Rg}\begin{vmatrix}6 & -12 & 6\\ 10 & -20 & 10\\ 12 & -24 & 12\end{vmatrix}=1.$$

Размерность второго собственного подпространства равна $3-1=2$.

Сумма размерностей обоих подпространств равна трем. Следовательно, базис из собственных векторов существует. Он собирается из базисов собственных подпространств. Чтобы его построить, нужно для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)x = 0$. Фундаментальная система решений представляет собой базис линейного пространства решений однородной СЛАУ, в нашем случае собственного подпространства матрицы.

Для собственного значения $\lambda_1 = -1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому фундаментальная система состоит из одного столбца. Например, можно взять столбец $(3\ \ 5\ \ 6)^{\mathrm{т}}$.

Для собственного значения $\lambda_2 = 1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен единице, поэтому фундаментальная система состоит из двух столбцов. Например, фундаментальную систему решений составляют столбцы $(2\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$ и $(0\ \ 1\ \ 2)^{\mathrm{т}}$.

Таким образом, базисом из собственных векторов матрицы A является система

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а сама матрица A подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица P преобразования подобия представляет собой матрицу перехода из одного базиса в другой, т.е. ее столбцы представляют собой столбцы координат векторов нового базиса, записанные в старом. В нашем случае столбцы матрицы P определяются векторами „нового" базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.9. Линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ли, изменив базис, привести матрицу этого оператора к диагональному виду?

Составляем характеристическое уравнение линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 2$. Для определения размерностей собственных подпространств линейного оператора, отвечающих этим двум значениям, вычислим ранги соответствующих матриц:

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{Rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Оба собственных подпространства линейного оператора, отвечающие двум собственным значениям, имеют размерность $3 - 2 = 1$. Поэтому линейно независимая система из собственных векторов данного оператора может содержать максимум два вектора и по соображениям размерности не может быть базисом.

Дополнение 5.1. Жорданова нормальная форма

При исследовании *линейного оператора*, действующего в *линейном пространстве*, желательно выбирать *базис* так, чтобы *матрица линейного оператора* имела наиболее простой вид. Если линейный оператор имеет базис из *собственных векторов*, то его матрица в некотором базисе является диагональной (теорема 5.6). В частности, это верно в случае, когда все корни *характеристического уравнения линейного оператора* действительные и различные (см. следствие 5.1).

Матрица диагонального вида — наиболее простая, но не всякий линейный оператор может иметь такую матрицу (см. пример 5.7). Линейный оператор, который не может быть приведен к диагональному виду (т.е. его матрица ни в одном базисе не является диагональной), имеет характеристическое уравнение, у которого есть комплексные или кратные действительные корни.

Приведение матрицы линейного оператора к простому виду связано со структурой его *инвариантных подпространств*.

Теорема 5.7. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — инвариантные подпространства линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, причем $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$. Тогда в некотором базисе $\boldsymbol{b}$ матрица A этого оператора $\boldsymbol{A}$ имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

где 0 обозначает нулевые блоки соответствующего типа, а квадратные блоки H_1, H_2 имеют порядки $\dim\mathcal{H}_1$ и $\dim\mathcal{H}_2$ соответственно.

◄ Выберем в *линейных подпространствах* $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ базисы $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}_l)$ и $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{g}_k)$. В совокупности эти два базиса дают базис $\boldsymbol{b}$ всего пространства $\mathcal{L}$ (см. доказательство теоремы 2.5). Так как $\mathcal{H}_1$ — инвариантное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, вектор $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_i$, $i = \overline{1, l}$, попадает в $\mathcal{H}_1$ и поэтому является *линейной комбинацией системы векторов* $\boldsymbol{f}$. Другими словами, *координаты вектора* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_i$ в базисе $\boldsymbol{b}$, соответствующие векторам $\boldsymbol{g}_j$, равны нулю. Аналогично координаты векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j$, $j = \overline{1, k}$, в базисе $\boldsymbol{b}$, соответствующие векторам $\boldsymbol{f}_i$, также равны нулю. Значит, в базисе $\boldsymbol{b}$ матрица A оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид (5.10). ►

Следствие 5.3. Если $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s$ — инвариантные подпространства линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, причем $\mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \oplus \mathcal{H}_s = \mathcal{L}$, то в некотором базисе матрица оператора $\boldsymbol{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} H_1 & & & & \\ & \ddots & & \text{\Huge 0} & \\ & & H_i & & \\ & \text{\Huge 0} & & \ddots & \\ & & & & H_s \end{pmatrix},$$

где квадратный блок H_i имеет порядок $\dim\mathcal{H}_i$, $i = \overline{1, s}$, а остальные блоки являются нулевыми.

◄ Выберем в каждом из инвариантных подпространств $\mathcal{H}_i$ базис. Все базисы в совокупности образуют базис пространства $\mathcal{L}$, в котором оператор $\boldsymbol{A}$ будет иметь матрицу указанного вида. ►

Остановимся на случае, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет лишь простые корни, среди которых, вообще говоря, есть и комплексные. Так как характеристическое уравнение линейного оператора имеет действительные коэффициенты, каждому комплексному корню $\alpha + i\beta$ этого уравнения соответствует комплексно сопряженный корень $\alpha - i\beta$ той же кратности [1].

Теорема 5.8. *Любой паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения линейного оператора соответствует двумерное инвариантное подпространство этого оператора.*

◄ Зафиксируем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый базис $\boldsymbol{b}$ и рассмотрим матрицу A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, — комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора $\boldsymbol{A}$. Тогда $\det(A - \lambda E) = 0$ и система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(A - \lambda E)x = \mathbf{0}$ с комплексными коэффициентами имеет ненулевое решение x, которое можно записать в виде $x = u + iv$, разделив действительные и мнимые части у элементов столбца x.

Столбец v не является нулевым, так как в противном случае $x = u$, и $Au = \lambda u$. Мы видим, что действительные элементы столбца Au получаются из действительных элементов столбца u умножением на комплексное число λ, а это возможно лишь в случае, когда $u = 0$. Но это заключение противоречит выбору столбца x.

Столбцы u и v линейно независимы. Действительно, если они линейно зависимы, то $\mu u + \nu v = 0$, где одно из чисел μ и ν отлично от нуля. Мы можем утверждать, что $\mu \neq 0$, так как в противном случае $\nu v = 0$. Но $v \neq 0$, значит $\nu = 0$. Получилось, что оба коэффициента μ и ν являются нулевыми.

Итак, $\mu \neq 0$, и поэтому $u = kv$, где $k = -\nu/\mu \in \mathbb{R}$. Следовательно, $x = u + iv = (k+i)v$. Так как $Ax = \lambda x$, то $A\bigl((k+i)v\bigr) = \lambda(k+i)v$, и мы, сокращая равенство на $k+i$, находим, что $Av = \lambda v$. Как мы уже знаем, для комплексного λ такое равенство невозможно.

В равенстве $Ax = \lambda x$ сделаем замены $\lambda = \alpha + i\beta$, $x = u + iv$: $A(u+iv) = (\alpha + i\beta)(u+iv)$. Разделив действительные и мнимые части, получим два матричных уравнения

$$Au = \alpha u - \beta v, \quad Av = \beta u + \alpha v. \tag{5.11}$$

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, которые в базисе $\boldsymbol{b}$ имеют столбцы координат u и v. Эти векторы образуют линейно независимую систему, так как линейно независимы столбцы u и v. Кроме того, $\boldsymbol{Au} = \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{Av} = \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$, так как в матричной записи это совпадает с (5.11). Полученные соотношения означают, что двумерное линейное подпространство $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ является инвариантным подпространством линейного оператора $\boldsymbol{A}$. ►

Для любых действительных α и β обозначим

$$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Теорема 5.9. Если характеристическое уравнение линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ имеет p различных пар комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = \overline{1, p}$, и q различных действительных корней μ_j, $j = \overline{1, q}$, $2p + q = n = \dim \mathcal{L}$, то в некотором базисе матрица A этого оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} C(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & C(\alpha_p, \beta_p) & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_q \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

◀ Каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ характеристического уравнения соответствует двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{P}_j$ оператора $\boldsymbol{A}$ с базисом $\boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{v}_j$ (см. доказательство теоремы 5.8). Каждому *собственному значению* μ_j соответствует одномерное *собственное подпространство* $\mathcal{Q}_j$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$. Можно показать, что все эти подпространства образуют прямую сумму, так как пересечение любой пары таких подпространств содержит лишь нулевой вектор. Учитывая, что сумма размерностей этих подпространств равна $2p+q=n=\dim\mathcal{L}$, заключаем, что

$$\mathcal{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_p \oplus \mathcal{Q}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{Q}_q = \mathcal{L}.$$

Согласно следствию 5.3, в некотором базисе матрица A оператора $\boldsymbol{A}$ имеет блочно-диагональный вид, причем каждый диагональный блок представляет собой матрицу ограничения оператора $\boldsymbol{A}$ на соответствующее инвариантное подпространство. В случае двумерного подпространства $\mathcal{P}_j$ в базисе $\boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{v}_j$ эта матрица равна $C(\alpha_j, \beta_j)$ (см. (5.12)), а в случае одномерного инвариантного пространства $\mathcal{Q}_j$ такой блок есть просто число, представляющее собой собственное значение μ_j. ▶

Следствие 5.4. Если *характеристическое уравнение* квадратной *матрицы* A порядка n имеет p различных пар комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j=\overline{1,p}$, и q различных действительных корней μ_j, $j=\overline{1,q}$, $2p+q=n$, то эта *матрица подобна* некоторой блочно-диагональной *матрице* вида (5.13).

◀ Указанная матрица A является матрицей некоторого линейного оператора $\boldsymbol{A}$, характеристическое уравнение которого имеет различные корни. Согласно теореме 5.9, в некотором базисе оператор $\boldsymbol{A}$ имеет матрицу A' блочно-диагонального вида (5.13). Матрицы A' и A подобны как матрицы одного оператора. ▶

Если характеристическое уравнение оператора имеет кратные корни, действительные или комплексные, то инвариантные подпространства такого оператора имеют более сложную структуру. Рассмотрим два типа специальных матриц.

Для произвольного действительного числа μ введем обозначение матрицы порядка s:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы все диагональные элменты равны μ, над главной диагональю расположены элементы 1, а все остальные равны нулю. В случае $s = 1$ рассматриваемая матрица сводится к единственному числу μ.

Для любого комплексного числа $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \ne 0)$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$:

$$C_r(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(\alpha,\beta) & E \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где $C_1(\alpha,\beta) = C(\alpha,\beta)$ — квадратная матрица порядка 2 вида (5.12). Все остальные блоки также являются квадратными матрицами порядка 2, E обозначает единичную матрицу, а 0 — нулевую.

Блочно-диагональную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & C_{r_m}(\alpha_m,\beta_m) & & & \\ & & & J_{s_1}(\mu_1) & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix}, \qquad (5.14)$$

где α_j, β_j $(j=\overline{1,m})$ и μ_l $(l=\overline{1,k})$ — действительные числа, называют ***жордановой***, ее диагональные блоки — ***жордановыми клетками***. Жорданову матрицу A', подобную данной матрице A, называют ***жордановой нормальной формой*** (***жордановой канонической формой***) матрицы A.

Жорданова нормальная форма определяется неоднозначно, так как подходящими преобразованиями подобия можно переставлять диагональные блоки (перестановка блоков в матрице линейного оператора вызывается перестановкой соответствующих векторов базиса). Среди жордановых клеток жордановой матрицы могут встречаться одинаковые. Однако можно утверждать, что если две жордановы матрицы подобны, то одна получается из другой перестановкой диагональных блоков. Это объясняется тем, что каждая жорданова клетка вида $J_j(\mu_j)$ определяется собственным значением μ_j матрицы, а жорданова клетка $C_j(\alpha_j,\beta_j)$ — комплексным корнем $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$ характеристического уравнения матрицы. Частным случаем жордановой матрицы является матрица вида (5.13) (когда все корни характеристического уравнения простые) и диагональная матрица (все корни действительные, а все жордановы клетки имеют порядок 1).

Теорема 5.10. Каждая матрица имеет жорданову нормальную форму.

Вопросы и задачи

5.1. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};\quad \text{в)}\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{д)}\ \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -2/3\\ 4/3 & -1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix};\quad \text{е)}\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

В примерах в), д)–к) постройте базис из собственных векторов и запишите матрицу линейного оператора в этом базисе.

5.2. Выясните, приводится ли к диагональному виду данная матрица:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

5.3. Пусть линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве, имеет в некотором базисе матрицу A. Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_n — собственные значения этого оператора. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, матрицей которого в том же базисе является: а) A^2; б) A^{-1}.

5.4. В линейном пространстве квадратных матриц порядка 2 содержится линейная оболочка матриц A^k, $k=\overline{0,\,100}$. Найдите размерность этой линейной оболочки для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.5. Докажите, что для каждого собственного значения λ линейного оператора $\boldsymbol{A}$ имеет место равенство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda) = \ker(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$.

5.6. Докажите, что кратность собственного значения λ линейного оператора $\boldsymbol{A}$ не меньше размерности соответствующего собственного подпространства $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ этого оператора.

5.7. Докажите теорему Кэли — Гамильтона в случае квадратной матрицы, все корни характеристического уравнения которой действительны и попарно различны.

5.8. Сформулируйте теорему Кэли — Гамильтона для линейных операторов и доказать ее в случае линейного оператора, имеющего базис из собственных векторов.

5.9. Докажите, что поворот вектора на плоскости на угол 2φ можно реализовать за три последовательно выполняемых шага: поворот вектора на угол φ; растяжение с коэффициентом $2\cos\varphi$; прибавление вектора, противоположного исходному.

5.10. Докажите, что любой линейный оператор в пространстве V_3 имеет собственный вектор.

5.11. Приведите пример линейного оператора, не имеющего собственных векторов. Какой может быть размерность линейного пространства, в котором есть такие операторы?

5.12. Докажите, что для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{c} \in V_3$ линейный оператор $\boldsymbol{A}$: $V_3 \to V_3$, определяемый соотношением $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{c}$, имеет единственное собственное значение, равное нулю.

5.13. Пусть $\mathcal{H}$ — линейное подпространство евклидова пространства $\mathcal{E}$. Рассмотрим линейный ***оператор ортогонального проектирования*** $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ$, где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + \boldsymbol{x}^\perp$, $\boldsymbol{x}^\circ \in \mathcal{H}$, $\boldsymbol{x}^\perp \in \mathcal{H}^\perp$, — разложение произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ на его ортогональную проекцию $\boldsymbol{x}^\circ$ и ортогональную составляющую $\boldsymbol{x}^\perp$. Найдите собственные значения и собственные векторы этого линейного оператора.

5.14. Докажите, что нуль является собственным значением любой кососимметрической матрицы нечетного порядка.

6. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

6.1. Сопряженный оператор

Пусть $\mathcal{E}$ — *евклидово пространство.*

Определение 6.1. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}^*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называют ***сопряженным*** к линейному оператору $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, если для любых *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ верно равенство

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}). \tag{6.1}$$

Данное определение сформулировано так, что оставляет открытыми два вопроса. Во-первых, не ясно, каждый ли линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, имеет сопряженный. Во-вторых, из определения нельзя понять, однозначно или нет определяется сопряженный оператор. Прежде чем формулировать теорему, отвечающую на оба эти вопроса, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Если квадратные матрицы M и N порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение $x^{\mathrm{T}} M y = x^{\mathrm{T}} N y$, то $M = N$.

◀ Пусть m_{ij}, n_{ij} — элементы матриц M и N соответственно, стоящие в i-й строке и j-м столбце. Для произвольной пары индексов i и j выберем такие вектор-столбцы x и y:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \begin{smallmatrix} i\text{-я} \\ \text{строка} \end{smallmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \begin{smallmatrix} j\text{-я} \\ \text{строка} \end{smallmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

в которых присутствует только один ненулевой элемент, равный единице и стоящий на указанном месте. Записав равенство $x^{\mathrm{T}} M y = x^{\mathrm{T}} N y$ с выбранными столбцами x и y и вычислив обе стороны равенства, получаем $m_{ij} = n_{ij}$.

Так как пара индексов может быть выбрана произвольно, заключаем, что $M = N$. ►

Теорема 6.1. *Любому линейному оператору* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *соответствует единственный сопряженный оператор* $\boldsymbol{A}^*$, *причем его матрицей в любом ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}$ *является матрица* A^{T}, *транспонированная матрице* A *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ *в том же базисе* $\boldsymbol{e}$.

◄ Доказательство теоремы основано на том, что фиксированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $L(\mathcal{E},\mathcal{E})$ и матрицами из $M_n(\mathbb{R})$, $n = \dim \mathcal{E}$. Это соответствие заключается в сопоставлении *линейному оператору* его *матрицы* в фиксированном базисе.

Докажем, что линейный оператор $\boldsymbol{B}$ с матрицей $B = A^{\mathrm{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ является сопряженным к линейному оператору $\boldsymbol{A}$. Для этого достаточно проверить выполнение равенства

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{By}) \tag{6.2}$$

для любой пары векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$.

Пусть x, y — столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда, согласно теореме 4.3, вектор $\boldsymbol{Ax}$ имеет столбец координат Ax, а левая часть равенства (6.2) равна $(Ax)^{\mathrm{T}} y$, что следует из ортонормированности базиса (см. **3.7**). Аналогично правая часть этого равенства имеет вид $x^{\mathrm{T}}(By)$. Следовательно, равенство (6.2) в координатной записи имеет вид

$$(Ax)^{\mathrm{T}} y = x^{\mathrm{T}}(By). \tag{6.3}$$

Так как $(Ax)^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ в силу свойств матричных операций, равенство (6.3) эквивалентно равенству

$$x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} y = x^{\mathrm{T}} B y, \tag{6.4}$$

которое при $B = A^{\mathrm{T}}$ превращается в тождество.

Если некоторый линейный оператор $\boldsymbol{B}$ является сопряженным к линейному оператору $\boldsymbol{A}$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство (6.2). Значит, для матриц A и B этих операторов равенство (6.4) выполняется для любых столбцов x и y. Согласно доказанной лемме, $B = A^{\mathrm{T}}$. Поэтому линейный оператор $\boldsymbol{B}$ определен однозначно, так как однозначно определена его матрица. ►

В некоторых случаях линейный оператор, сопряженный к данному линейному оператору, можно найти, не вычисляя матрицы этого оператора.

Пример 6.1. Вектор $\boldsymbol{a} \in V_3$ порождает линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$ согласно формуле

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}.$$

Оператор, сопряженный к оператору $\boldsymbol{A}$, можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведений [III]:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \\ = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

Из приведенных соотношений видно, что $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$.

Пример 6.2. Множество $C_0^\infty[a, b]$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, у которых в точках a и b производные любого порядка равны нулю, является линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на действительное число, а формула

$$(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

задает в этом линейном пространстве скалярное произведение (см. пример 3.4). Отображение $\boldsymbol{A}f = f'$, которое каждой функции $f \in C_0^\infty[a, b]$ ставит в соответствие ее производную, является линейным оператором. Оператором, сопряженным к $\boldsymbol{A}$, будет $-\boldsymbol{A}$, поскольку, согласно *правилу интегрирования по частям*,

$$(\boldsymbol{A}f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)\,dt =$$
$$= -\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\bigl(-g'(t)\bigr)\,dt = (f, -\boldsymbol{A}g).$$

6.2. Самосопряженные операторы и их матрицы

Определение 6.2. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}$, действующий в *евклидовом пространстве*, называют ***самосопряженным***, если $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$.

Это определение можно сформулировать по-другому. Линейный оператор самосопряженный, если для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ верно равенство

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\,.$$

Действительно, если указанное соотношение выполняется, то, согласно определению 6.1, линейный оператор $\boldsymbol{A}$ является *сопряженным оператором* к самому себе, т.е. $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$.

Пример 6.3. Самосопряженными являются простейшие линейные операторы: *нулевой* $\boldsymbol{\Theta}$ и *тождественный* $\boldsymbol{I}$, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$

$$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{y})\,,$$
$$(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{y})\,.$$

Пример 6.4. Рассмотрим линейное пространство V_3 с обычным скалярным произведением *свободных векторов* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Отображение $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$ ортогонального проектирования векторов из V_3 на направление вектора $\boldsymbol{a}$ единичной длины, которое определяется формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, является линейным оператором, так как

$$\boldsymbol{A}(\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}) = (\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} = \\ = \mu\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} + \nu\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} = \mu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \nu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

Убедимся, что этот оператор является самосопряженным:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ((\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = \\ = (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\,.$$

Приведенные рассуждения не используют специфику пространства V_3 и могут быть проведены в произвольном евклидовом пространстве. Любой единичный вектор $\boldsymbol{a}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ порождает линейный оператор $\boldsymbol{P_a}$ ортогонального проектирования на линейное подпространство $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}\}$ согласно формуле $\boldsymbol{P_a}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, и этот оператор является самосопряженным.

Теорема 6.2. *Матрица самосопряженного оператора* в любом *ортонормированном базисе* является симметрической. Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической, то этот оператор — самосопряженный.

◄ Согласно определению 6.2, $\boldsymbol{A}$ — самосопряженный оператор, если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, т.е. если линейный оператор равен своему сопряженному оператору. Это эквивалентно тому, что матрица линейного оператора в ортонормированном базисе совпадает со своей транспонированной (она является матрицей сопряженного оператора). Такие матрицы и называют симметрическими. ►

Напомним, что комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называют *комплексно сопряженными.* Число, комплексно сопряженное к числу z, обозначают $\overline{z}$. Рассмотрим произвольную матрицу $M=(m_{ij})$, элементами которой являются комплексные (в частности, действительные) числа m_{ij}. Матрицу $\overline{M}=(\overline{m}_{ij})$ того же типа, что и M, элементами которой являются числа $\overline{m}_{ij}$, будем называть ***комплексно сопряженной*** к матрице M. Она состоит из комплексно сопряженных элементов матрицы M: $\overline{M}=(\overline{m}_{ij})$. Из свойств комплексных чисел вытекают следующие соотношения:

$$\overline{M+N}=\overline{M}+\overline{N}, \qquad \overline{MN}=\overline{M}\,\overline{N}, \qquad \overline{M^{\mathrm{т}}}=\left(\overline{M}\right)^{\mathrm{т}}.$$

Теорема 6.3. Все корни *характеристического уравнения* самосопряженного оператора действительны.

◀ Согласно теореме 6.2, утверждение можно переформулировать следующим образом: характеристическое уравнение симметрической матрицы имеет только действительные корни. В этой форме и будем его доказывать.

Предположим, что некоторое число λ, вообще говоря комплексное, является корнем характеристического уравнения симметрической матрицы A, т.е. $\det(A-\lambda E)=0$. Тогда система линейных алгебраических уравнений $(A-\lambda E)x=0$ имеет некоторое ненулевое решение $x=(x_1 \;\ldots\; x_n)^{\mathrm{т}}$, состоящее из комплексных чисел x_k, $k=\overline{1,n}$. Рассмотрим столбец $\overline{x}$, комплексно сопряженный к столбцу x. Умножим равенство $(A-\lambda E)x=0$ слева на строку $\overline{x}^{\mathrm{т}}$. Тогда

$$\overline{x}^{\mathrm{т}}(A-\lambda E)x=0,$$

или

$$\overline{x}^{\mathrm{т}}Ax=\lambda\overline{x}^{\mathrm{т}}x. \tag{6.5}$$

Так как произведение комплексного числа на сопряженное к нему является действительным числом, равным квадрату модуля комплексного числа, а x — ненулевое решение, то

$$\overline{x}^{\mathrm{T}} x = \overline{x}_1 x_1 + \ldots + \overline{x}_n x_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0,$$

т.е. матричное произведение $\overline{x}^{\mathrm{T}} x$ представляет собой действительное положительное число.

Из равенства 6.5 находим

$$\lambda = \frac{\overline{x}^{\mathrm{T}} A x}{\overline{x}^{\mathrm{T}} x},$$

причем знаменатель дроби справа является действительным числом. Следовательно, число λ будет действительным, если числитель этой дроби $w = \overline{x}^{\mathrm{T}} A x$ будет числом действительным.

В силу симметричности матрицы A

$$w = w^{\mathrm{T}} = \left(\overline{x}^{\mathrm{T}} A x\right)^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \overline{x} = x^{\mathrm{T}} A \overline{x}.$$

Поэтому с учетом свойств операции комплексного сопряжения матриц и благодаря тому, что элементами матрицы A являются действительные числа, получаем

$$\overline{w} = \overline{\overline{x}^{\mathrm{T}} A x} = \left(\overline{\overline{x}}\right)^{\mathrm{T}} \overline{A}\overline{x} = x^{\mathrm{T}} A \overline{x} = w.$$

Комплексное число, сопряженное самому себе — это действительное число. Следовательно, и w является действительным. ►

Следствие 6.1. Если матрица A является симметрической, то все корни ее характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ действительные.

Следствие 6.2. Самосопряженный оператор, действующий в *n-мерном* евклидовом *пространстве*, имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его *кратность*.

Следствие 6.3. Симметрическая матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

6.3. Собственные векторы самосопряженного оператора

Теорема 6.4. *Собственные векторы самосопряженного оператора*, отвечающие различным *собственным значениям, ортогональны.*

◀ Рассмотрим самосопряженный оператор $\boldsymbol{A}$ и два его собственных вектора $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$. Поэтому

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2). \tag{6.6}$$

Но так как $\boldsymbol{A}$ является самосопряженным оператором, то $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)$. Значит,

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2). \tag{6.7}$$

Приравнивая правые части соотношений (6.6) и (6.7), получаем

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0. \tag{6.8}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из равенства (6.8) следует, что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$, что и означает ортогональность векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$. ▶

Теорема 6.5. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в *n-мерном евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, попарно различны, то в $\mathcal{E}$ существует *ортонормированный базис*, в котором *матрица* этого *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

◀ Поскольку собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, то, выбрав для каждого λ_i соответствующий ему собственный вектор $\boldsymbol{e}_i$, получим систему $\boldsymbol{e}$ *ненулевых векторов*, которые по теореме 6.4 попарно ортогональны. Поэтому $\boldsymbol{e}$ — *ортогональная система векторов*. Согласно теореме 5.5, она *линейно независима* и, имея n векторов, является базисом (см. теорему 1.4). Этот базис является ортогональным, а чтобы его превратить в ортонормированный, необходимо каждый вектор $\boldsymbol{e}_i$ нормировать делением на его длину.

Таким образом, в условиях теоремы существует базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$. По теореме 5.6 матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов является диагональной, а диагональные элементы матрицы представляют собой собственные значения. ►

Хотя все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны (см. теорему 6.3), среди них могут быть кратные, и тогда теорема 6.5 неприменима. Однако и в этом случае матрица самосопряженного оператора в некотором базисе имеет диагональный вид.

Теорема 6.6. Для любого самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица A самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе имеет диагональный вид, на ее диагонали расположены собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их *кратность*. #

Доказательство этой теоремы приведено в **Д.6.1**.

Следствие 6.4. Любая симметрическая матрица M порядка n подобна некоторой диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P порядка n, что

$$P^{-1}MP = \operatorname{diag}(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n).$$

Последовательность $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из n чисел представляет собой перечень всех корней характеристического уравнения матрицы M с учетом их кратностей.

◄ Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ *стандартный* ортонормированный *базис*, и пусть матрица M является матрицей в этом базисе некоторого линейного оператора $\boldsymbol{M}$. Тогда этот оператор будет самосопряженным. По теореме 6.6 для него существует ортонормированный базис, в котором его матрица M' имеет диагональный вид $M' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Матрица M' получается из исходной матрицы M при помощи матрицы перехода P из стандартного базиса в указанный ортонормированный базис: $M' = P^{-1}MP$. ►

Дополнение 6.1. Инвариантные подпространства самосопряженного оператора

Теорема 6.7. Если $\mathcal{H}$ — *инвариантное подпространство самосопряженного оператора* $\boldsymbol{A}$, действующего в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, то его *ортогональное дополнение* $\mathcal{H}^\perp$ также является инвариантным подпространством этого оператора $\boldsymbol{A}$.

◄ Нам достаточно проверить, что для любого вектора $\boldsymbol{y}$ линейного подпространства $\mathcal{H}^\perp$ его образ $\boldsymbol{Ay}$ тоже принадлежит $\mathcal{H}^\perp$, т.е. что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ выполнено условие $(\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{x}) = 0$.

Пусть $\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}^\perp$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$. Так как оператор $\boldsymbol{A}$ самосопряженный, выполнено равенство $(\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Ax})$. Но $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство оператора $\boldsymbol{A}$, т.е. $\boldsymbol{Ax} \in \mathcal{H}$ для вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$. Поэтому $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Ax}) = 0$, так как вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}^\perp$ ортогонален любому вектору из $\mathcal{H}$, в частности вектору $\boldsymbol{Ax}$. Следовательно, $(\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{x}) = 0$, что и требовалось доказать. ►

Мы видели, что *кратность собственного значения* и *размерность* соответствующего *собственного подпространства линейного оператора* могут не совпадать (см. пример 5.7). Эти две характеристики совпадают, если линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, является самосопряженным.

Теорема 6.8. Пусть λ — собственное значение самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда кратность собственного значения λ равна размерности отвечающего этому значению собственного подпространства $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)$ линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

◀ Собственное подпространство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)$ самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ является инвариантным подпространством этого оператора. Поэтому, согласно теореме 6.7, ортогональное дополнение $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)^{\perp}$ также является инвариантным подпространством самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$. Пусть $\dim\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)=k$, а $\dim\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)^{\perp}=l$. Выберем в линейных подпространствах $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)$ и $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)^{\perp}$ базисы $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_k)$ и $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g}_1\ \ldots\ \boldsymbol{g}_l)$ соответственно.

Так как $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)\oplus\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)^{\perp}=\mathcal{E}$, система векторов $(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{g})$ является базисом евклидова пространства $\mathcal{E}$. Рассмотрим в этом базисе матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$. Для любого вектора $\boldsymbol{e}_i$ системы $\boldsymbol{e}$ имеем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i=\lambda\boldsymbol{e}_i$, так как $\boldsymbol{e}_i$ принадлежит собственному подпространству $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)$ линейного оператора, отвечающему собственному значению λ. Для каждого вектора $\boldsymbol{g}_j$ системы $\boldsymbol{g}$ имеем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j=a_{j1}\boldsymbol{g}_1+\ldots+a_{jl}\boldsymbol{g}_l$, так как $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A},\lambda)^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{g}$ — базис этого подпространства. Эти разложения означают, что матрица A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{g})$ имеет блочный вид:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda E_k & 0\\ 0 & M\end{pmatrix},$$

где E_k обозначает единичную матрицу порядка k, а блок M представляет собой квадратную матрицу порядка l, состоящую из коэффициентов разложения векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j$ в базисе $(\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{g})$:

$$M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ll}\end{pmatrix}.$$

Исходя из блочного представления матрицы A получаем вид ее характеристического уравнения:

$$\chi_A(\tau) = \det(A - \tau E_n) = (\lambda - \tau)^k \det(M - \tau E_l) = \\ = (\lambda - \tau)^k \chi_M(\tau), \quad (6.9)$$

где E_n и E_l — единичные матрицы порядков n и l.

Отметим, что матрица M представляет собой матрицу в базисе $\boldsymbol{g}$ линейного оператора, являющегося *ограничением линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ на его инвариантное подпространство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)^\perp$. Оператор $\boldsymbol{A}$ не имеет в подпространстве $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)^\perp$ собственных векторов с собственным значением λ. Поэтому λ не является собственным значением матрицы M, и из представления (6.9) заключаем, что собственное значение λ матрицы A имеет кратность k. ►

Доказательство теоремы 6.6 опирается на свойства инвариантных подпространств.

◄ Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные значения самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, а $r_1, \ldots, r_k$ — их кратности. Так как характеристическое уравнение самосопряженного оператора имеет только действительные корни, сумма кратностей $r_1 + \ldots + r_k$ собственных значений равна размерности n евклидова пространства $\mathcal{E}$. Рассмотрим собственное подпространство $\mathcal{H}_i$ оператора $\boldsymbol{A}$, соответствующее собственному значению λ_i. Размерность этого линейного подпространства, согласно теореме 6.8, совпадает с кратностью r_i собственного значения λ_i. Выберем ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{H}_i$, который будет состоять из r_i собственных векторов самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, попарно ортогональных и имеющих единичную длину. Объединив выбранные базисы в одну систему, получим систему из n собственных векторов единичной длины, любые два из которых ортогональны. Действительно, либо оба вектора одновременно входят в базис некоторого подпространства $\mathcal{H}_i$ и будут ортогональны согласно выбору, либо они попадают в разные инвариантные подпространства $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ и будут ортогональны как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям (см. теорему 6.4).

Итак, мы выбрали систему из n попарно ортогональных векторов единичной длины. Согласно теореме 3.4, эта система линейно независима, а так как количество векторов в ней совпадает с размерностью пространства, она является ортонормированным базисом. Согласно теореме 5.6, матрица оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе является диагональной и на ее диагонали расположены собственные значения, повторяющиеся столько раз, какова их кратность, поскольку построенный базис состоит из соответствующих наборов собственных векторов. ►

Вопросы и задачи

6.1. Известно, что матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе диагональна. Является ли этот линейный оператор самосопряженным?

6.2. Известно, что в некотором базисе, не являющемся ортогональным, матрица оператора $\boldsymbol{A}$ симметрическая. Можно ли утверждать, что: а) $\boldsymbol{A}$ — самосопряженный оператор; б) $\boldsymbol{A}$ не является самосопряженным оператором. Что можно утверждать, если базис ортогональный, но не ортонормированный?

6.3. Линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве, имеет в некотором базисе симметрическую матрицу. Докажите, что этот оператор имеет базис из собственных векторов, даже если линейное пространство не является евклидовым.

6.4. Докажите, что: а) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$; б) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$; в) если линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратный, то и оператор $\boldsymbol{A}^*$ имеет обратный, причем $(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

6.5. Рассмотрим в пространстве V_2 линейный оператор $\boldsymbol{R}_\varphi$ поворота вектора на угол φ, $0 < \varphi < \pi$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\boldsymbol{R}_\varphi$.

6.6. Пусть $\mathcal{E}$ — евклидово пространство, $\boldsymbol{e}$ — произвольный, вообще говоря, неортогональный базис в $\mathcal{E}$, Γ — матрица Грама для системы векторов $\boldsymbol{e}$. Докажите, что если линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ имеет матрицу A, то сопряженный к нему оператор $\boldsymbol{A}^*$ имеет в том же базисе матрицу $A^* = \Gamma^{-1}A^{\mathrm{T}}\Gamma$.

6.7. В базисе

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1), \qquad \boldsymbol{b}_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0),$$
$$\boldsymbol{b}_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0), \qquad \boldsymbol{b}_4 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

линейного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряженного оператора $\boldsymbol{A}^*$ в том же базисе $(\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3\ \ \boldsymbol{b}_4)$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ предполагается *стандартное скалярное произведение.*

6.8. Докажите, что для любого евклидова пространства $\mathcal{E}$ отображение $L(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to L(\mathcal{E},\mathcal{E})$, сопоставляющее линейному оператору из $L(\mathcal{E},\mathcal{E})$ ему сопряженный, является изоморфизмом линейного пространства $L(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Зависит ли этот изоморфизм от выбора базиса в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$? Когда этот изоморфизм является тождественным отображением?

6.9. Для симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

найдите подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую матрицу P.

7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ОПЕРАТОРЫ

7.1. Ортогональные матрицы и их свойства

Определение 7.1. Квадратную матрицу O называют ***ортогональной***, если она удовлетворяет условию

$$O^{\mathrm{T}}O = E, \tag{7.1}$$

где E — единичная матрица.

Пример 7.1. Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E, так как $E^{\mathrm{T}}E = EE = E$. Напротив, нулевая матрица не является ортогональной: $\Theta^{\mathrm{T}}\Theta = \Theta \neq E$.

Пример 7.2. Матрица

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

является ортогональной, поскольку $U^{\mathrm{T}}U = E$. Это можно проверить непосредственно. #

Из определения 7.1 вытекает ряд свойств ортогональных матриц.

Свойство 7.1. Определитель ортогональной матрицы O может иметь одно из двух возможных значений: $\det O = \pm 1$.

◄ Согласно равенству (7.1), имеем $\det\left(O^{\mathrm{T}}O\right) = \det E$. Вспомнив [III], что определитель произведения матриц равен произведению их определителей, а при транспонировании матрицы определитель не меняется, получим

$$\det(O^{\mathrm{T}}O) = \det O^{\mathrm{T}} \det O = (\det O)^2.$$

Так как $\det E = 1$, то и $(\det O)^2 = 1$. Следовательно, $\det O = \pm 1$. ►

Свойство 7.2. Матрица, обратная к ортогональной матрице O, совпадает с ее транспонированной матрицей, т.е. $O^{-1} = O^{\mathrm{т}}$.

◄ Согласно свойству 7.1, ортогональная матрица невырождена и потому имеет обратную матрицу O^{-1}. Умножая равенство (7.1) справа на матрицу O^{-1}, получаем

$$(O^{\mathrm{т}}O)O^{-1} = EO^{-1},$$

откуда $O^{\mathrm{т}}(OO^{-1}) = O^{-1}$. Но $OO^{-1} = E$, поэтому $O^{\mathrm{т}} = O^{-1}$. ►

Свойство 7.3. Произведение ортогональной матрицы O на транспонированную к ней равно единичной матрице, т.е. $OO^{\mathrm{т}} = E$.

◄ Согласно свойству 7.2 и определению обратной матрицы, $OO^{\mathrm{т}} = OO^{-1} = E$. ►

Свойство 7.4. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

◄ Нужно для произвольной ортогональной матрицы O доказать равенство

$$(O^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}O^{\mathrm{т}} = E, \tag{7.2}$$

представляющее собой запись соотношения (7.1) для матрицы $O^{\mathrm{т}}$. Так как, согласно свойству операции транспонирования, $(O^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} = O$, равенство (7.2) эквивалентно равенству $OO^{\mathrm{т}} = E$, которое верно в силу свойства 7.3. ►

Свойство 7.5. Произведение двух ортогональных матриц O и Q одного порядка является ортогональной матрицей.

◄ Для доказательства достаточно проверить выполнение равенства (7.1) для матрицы OQ:

$$(OQ)^{\mathrm{т}}(OQ) = (Q^{\mathrm{т}}O^{\mathrm{т}})OQ = Q^{\mathrm{т}}(O^{\mathrm{т}}O)Q = Q^{\mathrm{т}}EQ = Q^{\mathrm{т}}Q = E.$$

В этих выкладках E, как обычно, обозначает единичную матрицу. ►

Свойство 7.6. Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

◄ Согласно свойству 7.1, ортогональная матрица невырождена, а потому имеет обратную. Согласно свойству 7.2, матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Наконец, согласно свойству 7.4, матрица, транспонированная к ортогональной, является ортогональной. ►

Пример 7.3. Рассмотрим матрицу U из примера 7.2. Так как она ортогональна, то обратную матрицу легко найти, используя свойство 7.6:

$$U^{-1} = U^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

7.2. Ортогональные операторы

Определение 7.2. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, действующий в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, называют ***ортогональным оператором*** (или ***ортогональным преобразованием***), если он сохраняет *скалярное произведение* в $\mathcal{E}$, т.е. для любых *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{7.3}$$

Так как ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, то он сохраняет *норму* (длину) вектора и угол между ненулевыми векторами. Действительно,

$$\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ненулевые, то и векторы $\boldsymbol{Ax}$ и $\boldsymbol{Ay}$ ненулевые. При этом

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}}) = \frac{(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay})}{\|\boldsymbol{Ax}\|\,\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} = \cos(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}).$$

Менее очевидно, что верно и обратное утверждение.

Теорема 7.1. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ сохраняет *евклидову норму*: $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$, то этот оператор ортогональный.

◄ Доказательство опирается на следующее тождество:

$$2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2,$$

верное для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, в чем можно убедиться, выражая нормы векторов через скалярное произведение. Используя это тождество и сохранение нормы оператором $\boldsymbol{A}$, получаем

$$2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\|^2 - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|^2 = \\ = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — произвольные векторы пространства $\mathcal{E}$. ►

Теорема 7.1 позволяет привести примеры ортогональных операторов. В пространствах V_2 и V_3 *свободных векторов* ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол (см. пример 4.2) является ортогональным, так как при таком повороте длины векторов не изменяются. Линейный оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве также является ортогональным.

Теорема 7.2. Пусть $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — ортогональный оператор в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ и $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$ — произвольный *ортонормированный базис* в $\mathcal{E}$. Тогда система векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{E}$.

◄ Достаточно подсчитать все парные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$. В силу ортогональности оператора $\boldsymbol{A}$ имеем

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Видим, что различные *векторы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ *и* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j$ *ортогональны*, а норма каждого из них равна единице. Поэтому *система векторов* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)$ состоит из ненулевых векторов и *ортогональна*. Согласно теореме 3.4, она *линейно независима*. Количество векторов в линейно независимой системе $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$ равно $\dim \mathcal{E} = n$, поэтому, согласно теореме 1.4, это базис, притом ортонормированный. ►

Теорема 7.3. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ переводит какой-либо ортонормированный базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)$ в ортонормированный базис $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)$, то этот оператор ортогональный.

◄ Если вектор $\boldsymbol{x}$ имеет столбец координат $x = (x_1\ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, то его образ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ имеет тот же столбец координат в базисе $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$, так как, согласно определению линейного оператора,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n).$$

Выберем два произвольных вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$. Их скалярное произведение в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ выражается формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

но той же формулой выражается и скалярное произведение $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$, если в качестве базиса взять $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$. Поэтому соотношение $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ выполняется для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, что, согласно определению 7.2, означает ортогональность оператора $\boldsymbol{A}$. ►

Теорема 7.4. Если *матрица линейного оператора* в некотором ортонормированном базисе *ортогональна*, то этот оператор является ортогональным. Наоборот, матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

◀ Выберем в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ любой ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеющих в этом ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ столбцы координат x и y соответственно, выполнено равенство $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}y$ (это запись скалярного произведения в ортонормированном базисе, см. **3.7**).

Пусть матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в ортонормированном базисе является ортогональной. Тогда выполняется соотношение $A^{\mathrm{T}}A = E$ и, следовательно, равенство

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)y = x^{\mathrm{T}}Ey \tag{7.4}$$

верно для любых столбцов x и y. Но это равенство представляет собой матричную запись равенства скалярных произведений $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеющих столбцы координат x и y в этом же ортонормированном базисе. Мы приходим к заключению, что оператор ортогональный.

Докажем обратное утверждение теоремы. В любом ортонормированном базисе соотношение (7.3) в координатах имеет вид

$$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ay) = x^{\mathrm{T}}y,$$

т.е. его можно записать в виде (7.4). Как мы ранее доказали (см. лемму на с. 185), из этого равенства, выполняющегося для любых столбцов x и y, следует равенство матриц $A^{\mathrm{T}}A = E$, что и означает ортогональность матрицы A. ▶

Замечание 7.1. Напомним, что матрица линейного оператора состоит из столбцов координат образов базисных векторов. Имея это в виду, нетрудно заметить, что равенство $A^{\mathrm{T}}A = E$ означает, что столбцы матрицы A, как элементы *n-мерного линейного арифметического пространства* со *стандартным скалярным произведением*, попарно ортогональны и имеют единичную длину. Действительно, в i-й строке и j-м столбце матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ стоит скалярное произведение i-го и j-го столбцов матрицы A. Это позволяет свести теорему 7.4 к теореме 7.3.

7.3. Матрицы перехода в евклидовом пространстве

Теорема 7.5. В *евклидовом пространстве матрица перехода* от одного *ортонормированного базиса* к другому является *ортогональной.*

◀ Рассмотрим в произвольном *n-мерном* евклидовом *пространстве* $\mathcal{E}$ два ортонормированных базиса $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ и $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Пусть U — матрица перехода от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{e}$.

Как следует из определения 1.6, столбцы $e_1, \ldots, e_n$ матрицы перехода U — это столбцы *координат векторов* нового базиса $\boldsymbol{e}$ относительно старого базиса $\boldsymbol{b}$, т.е. $U = (e_1 \ \ldots \ e_n)$, где $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{b}e_i$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому

$$U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ e_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ e_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (e_1 \ e_2 \ \ldots \ e_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^{\mathrm{T}}e_1 & e_1^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_1^{\mathrm{T}}e_n \\ e_2^{\mathrm{T}}e_1 & e_2^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_2^{\mathrm{T}}e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_n^{\mathrm{T}}e_1 & e_n^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_n^{\mathrm{T}}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство в приведенной выкладке следует из того, что столбцы $e_1, \ldots, e_n$ — это столбцы координат векторов ортонормированного базиса в ортонормированном базисе, а матричное произведение $e_i^{\mathrm{T}} e_j$ представляет собой запись в координатах *скалярного произведения* $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, которое в силу ортонормированности базиса $\boldsymbol{e}$ равно нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$.

Мы показали, что $U^{\mathrm{T}}U = E$, а это, согласно определению 7.1 ортогональной матрицы, и означает, что U — ортогональная матрица. ▶

Теорема 7.6. Пусть $\boldsymbol{b}$ — ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Любая ортогональная матрица U порядка n является матрицей перехода из базиса $\boldsymbol{b}$ в некоторый другой ортонормированный базис.

◄ Столбцы e_1, ..., e_n матрицы U можно рассматривать как координаты в базисе $\boldsymbol{b}$ некоторых векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathcal{E}$. Матрица $U^{\mathrm{T}}U$ есть не что иное, как *матрица Грама* для *системы векторов* $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, так как элемент этой матрицы в i-й строке и j-м столбце равен $e_i^{\mathrm{T}} e_j$, что представляет собой запись в координатах в ортонормированном базисе скалярного произведения $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Равенство $U^{\mathrm{T}}U = E$ означает, что *векторы* $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ попарно *ортогональны* и имеют единичную *длину* (см. доказательство теоремы 7.5). Поэтому указанная *система векторов* является *линейно независимой* (см. теорему 3.4), а так как количество векторов в системе совпадает с *размерностью* n евклидова пространства, она является базисом (см. теорему 1.4). Этот базис ортонормированный, а матрица U есть матрица перехода из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{e}$. ►

Замечание 7.2. Иногда говорят, что ортогональная матрица состоит из ортонормированных столбцов и строк. Эта терминология мотивируется следующим. Равенства $O^{\mathrm{T}}O = E$, $OO^{\mathrm{T}} = E$, верные для любой ортогональной матрицы, означают, что системы столбцов и строк матрицы O, рассматриваемых как элементы n-мерного *линейного арифметического пространства*, являются ортонормированными. #

Напомним, что матрица перехода определяет преобразование координат вектора при замене одного базиса другим. Если x_b — столбец старых координат вектора $\boldsymbol{x}$, x_e — столбец новых координат, U — матрица перехода из старого базиса в новый, то $x_b = Ux_e$. Две последние теоремы показывают, что при замене одного ортонормированного базиса другим в соответствующем преобразовании координат $x_b = Ux_e$ матрица U ортогональная.

Замечание 7.3. Любое *линейное преобразование линейного пространства* представляет собой отображение пространства в себя: каждый вектор линейного пространства меняет свое положение и переходит в свой образ. Преобразование координат не затрагивает элементов пространства, а лишь отражает изменение системы отсчета (базиса). Можно сказать, что преобразование пространства — это изменение окружающего пространства, а преобразование координат — это изменение положения наблюдателя. Эта физическая аналогия показывает, в чем различие между двумя понятиями.

7.4. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду

Матрица A *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ при замене *базиса* преобразуется согласно формуле $A' = U^{-1}AU$, где U — *матрица перехода* (см. теорему 4.6). Если речь идет об *евклидовом пространстве* и переходе из одного *ортонормированного базиса* в другой, *матрица* перехода U является *ортогональной* (см. теорему 7.5). Согласно свойству 7.2, такая матрица удовлетворяет соотношению $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$. Поэтому для случая ортонормированных базисов формулу преобразования матрицы линейного оператора можно записать следующим образом:

$$A' = U^{\mathrm{T}}AU. \tag{7.5}$$

Теорема 7.7. Для любой симметрической матрицы M существует такая ортогональная матрица U, что $U^{\mathrm{T}}MU = \Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, диагональными элементами которой являются *собственные значения* матрицы M, повторяющиеся согласно их *кратности*.

◀ Доказательство теоремы основано на следствии 6.4, теореме 7.5 и свойстве 7.2. Согласно следствию 6.4, для симметрической матрицы M порядка n существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1}MP = \Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где в последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ указаны все собственные значения матрицы M с учетом их кратностей. Из доказательства того же следствия вытекает, что P является матрицей перехода между ортонормированными базисами. Поэтому P — ортогональная матрица (см. теорему 7.5) и $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ (см. свойство 7.2). Следовательно, $P^{\mathrm{T}}MP = P^{-1}MP = \Lambda$, т.е. в качестве матрицы U в формулировке теоремы можно взять P. ►

Преобразование (7.5) с ортогональной матрицей U иногда называют ***ортогональным преобразованием матрицы*** A. Поэтому теорему 7.7 можно сформулировать так: любая симметрическая матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду. Чтобы найти соответствующую матрицу U, о которой говорится в этой теореме, необходимо:

1) найти собственные значения матрицы M;

2) для каждого собственного значения найти набор *собственных векторов*, соответствующих этому собственному значению, при этом эти собственные *векторы* должны быть *линейно независимыми* и их количество должно равняться кратности собственного значения;

3) преобразовать *системы* собственных *векторов*, полученные для каждого собственного значения, в *ортонормированные* при помощи *процесса ортогонализации Грама — Шмидта*. Объединить ортонормированные системы для каждого собственного значения в единую систему векторов, которая будет ортонормированным базисом евклидова пространства;

4) выписать матрицу U, столбцами которой являются координаты векторов построенной ортонормированной системы.

Пример 7.4. Найдем ортогональное преобразование, приводящее симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду.

1. Находим собственные значения матрицы A. Для этого составляем ее *характеристическое уравнение*

$$\det(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}=-\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda+10=0.$$

Это уравнение третьей степени. Так как его коэффициенты являются целыми числами, то целое число может быть его корнем лишь в случае, если оно делитель свободного члена. Поэтому мы можем поискать корни среди чисел ±1, ±2, ±5. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что одним из корней является $\lambda_1=1$.

Найденный корень позволяет разложить левую часть характеристического уравнения на линейный и квадратичный множители, например, при помощи деления характеристического многочлена на $x-1$ „в столбик“:

$$\begin{array}{rl|l}
- & \lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10 & \lambda\ -1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{\lambda^3-\ \ \lambda^2} & \lambda^2-11\lambda+10 \\
- & -11\lambda^2+21\lambda & \\
 & -\underline{11\lambda^2+11\lambda} & \\
- & 10\lambda-10 & \\
 & \underline{10\lambda-10} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Получаем разложение

$$(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=0,$$

откуда находим оставшиеся два корня $\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$. Таким образом, имеются два собственных значения: 1 кратности 2 и 10 кратности 1.

2–3. Найдем для собственного значения $\lambda_{1,2}=1$ кратности 2 два линейно независимых собственных вектора. Для этого нужно найти *фундаментальную систему решений* однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A-E)x=0$, т.е. системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0, \\ -2x_1-4x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен единице (все строки матрицы системы пропорциональны), поэтому можно отбросить второе и третье уравнения, оставив первое

$$x_1+2x_2-2x_3=0.$$

В качестве независимых переменных выбираем x_2, x_3. Фундаментальную систему решений составляют $x_2=1$, $x_3=0$, $x_1=-2$ и $x_2=0$, $x_3=1$, $x_1=2$, т.е. векторы

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Найденные собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2}=1$, линейно независимы, но ортогональными не являются. Построим по ним другую, ортонормированную пару собственных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ при помощи метода ортогонализации Грама — Шмидта:

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{b}_2-(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{g}_2\|=\frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda_3 = 10$ система линейных алгебраических уравнений имеет вид $(A - 10E)x = 0$, или

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве ее фундаментальной системы решений можно взять одно ненулевое решение, например вектор $\boldsymbol{b}_3 = (1 \;\; 2 \;\; -2)^{\mathrm{T}}$. Нормируя этот вектор, получаем

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найденные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов.

4. Составим из найденных векторов $\boldsymbol{e}_i$ матрицу

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

которая и является искомой.

Убедиться в том, что матрица U определена правильно, можно при помощи подстановки матрицы U и заданной матрицы A в следующее тождество:

$$U^{\mathrm{T}}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Замечание 7.4. В случае $n = 3$ при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ собственные векторы удобнее с точки зрения экономии вычислений находить в следующем порядке. Сначала для собственного значения кратности 1 ($\lambda_3 = 10$ в рассмотренном примере) найти собственный вектор и нормировать его. Обозначим полученный вектор, например, e_3. Затем для собственного значения кратности 2 ($\lambda_{1,2} = 1$ в рассмотренном примере) найти один собственный вектор и нормировать его. Получим вектор e_1. Векторы e_1 и e_3 будут ортогональными согласно теореме 6.4. Недостающий третий вектор ортонормированного базиса может быть найден при помощи векторного произведения: $e_2 = e_1 \times e_3$.

Описанный прием позволяет избежать процесса ортогонализации. Точно так же можно не применять процесс ортогонализации при $n = 2$, так как, зная один вектор e_1 ортонормированного базиса, мы можем получить второй поворотом первого на $90°$. Для этого достаточно поменять две координаты вектора e_1 местами, а у первой из них к тому же изменить знак. При $n > 3$ приемов, аналогичных описанным, нет.

Вопросы и задачи

7.1. Опишите множество всех ортогональных матриц второго порядка.

7.2. Пользуясь результатами задачи 7.1, докажите, что любой ортогональный оператор в евклидовом пространстве V_2 является либо поворотом вектора на некоторый угол, либо симметрией относительно некоторой прямой, либо произведением таких операторов.

7.3. Докажите, что произведение ортогональных операторов является ортогональным оператором. Можно ли утверждать, что: а) сумма ортогональных операторов есть ортогональный оператор? б) произведение ортогонального оператора на число есть ортогональный оператор?

7.4. Докажите, что линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в евклидовом пространстве тогда и только тогда является ортогональным, когда $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

7.5. Докажите, что если $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство для ортогонального оператора $\boldsymbol{A}$, то и $\mathcal{H}^{\perp}$ — тоже инвариантное подпространство этого оператора.

7.6. Докажите, что собственными значениями ортогонального оператора могут быть лишь числа 1 и -1.

7.7. Приведите пример ортогонального оператора, не имеющего собственных векторов. Какой может быть размерность евклидова пространства, в котором есть такие операторы?

7.8. Докажите, что любой ортогональный оператор в пространстве V_3 имеет собственный вектор. Используя результаты задач 7.2 и 7.5, опишите множество ортогональных операторов в V_3.

7.9. Докажите, что любому перемещению твердого тела вокруг неподвижной точки из одного положения в другое соответствует ортогональный оператор в пространстве V_3 и что эти положения связаны между собой вращением тела вокруг неподвижной оси. Эта ось проходит через неподвижную точку и параллельна собственному вектору указанного ортогонального оператора.

7.10. Приведите пример оператора, одновременно являющегося и самосопряженным, и ортогональным.

7.11. Приведите к диагональному виду ортогональным преобразованием следующие симметрические матрицы:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1. Определение квадратичной формы

Определение 8.1. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij}\in\mathbb{R}, \tag{8.1}$$

называют ***квадратичной формой.***

Для нас квадратичная форма представляет интерес как способ задания некоторой функции векторного аргумента, определенной в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$. Если в этом пространстве выбрать некоторый *базис*, то квадратичную форму (8.1) можно трактовать как функцию, значение которой определено через *координаты* $x_1, \ldots, x_n$ *вектора* $\boldsymbol{x}$. Эту функцию часто отождествляют с квадратичной формой.

Квадратичную форму (8.1) можно записать в матричном виде:

$$x^{\mathrm{T}}Ax, \tag{8.2}$$

где $x = (x_1 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$ — столбец, составленный из переменных; $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, называемая ***матрицей квадратичной формы*** (8.1).

Ранг матрицы A квадратичной формы называют ***рангом квадратичной формы.*** Если матрица A имеет максимальный ранг, равный числу переменных n, то квадратичную форму называют ***невырожденной***, а если $\operatorname{Rg} A < n$, то ее называют ***вырожденной.***

Пример 8.1. Квадратичная форма от трех переменных $x_1^2+4x_1x_3$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{Rg} A = 2 < 3$, то эта квадратичная форма является вырожденной. В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2+4x_1x_3 = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

8.2. Преобразование квадратичных форм

Пусть дана *квадратичная форма* $x^{\mathrm{T}}Ax$, где $x = (x_1 \ \ \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. В *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ с фиксированным *базисом* $\boldsymbol{b}$ она определяет функцию $f(\boldsymbol{x}) = x_b^{\mathrm{T}}Ax_b$, заданную через *координаты* x_b *вектора* $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Найдем представление этой же функции в некотором другом базисе $\boldsymbol{e}$. Пусть U — *матрица перехода* от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{e}$. Тогда координаты x_b вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ и координаты x_e того же вектора в новом базисе $\boldsymbol{e}$ будут связаны соотношением

$$x_b = Ux_e. \tag{8.3}$$

Функция $f(\boldsymbol{x})$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора $\boldsymbol{x}$ следующим образом:

$$x_b^{\mathrm{T}}Ax_b = (Ux_e)^{\mathrm{T}}A(Ux_e) = x_e^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}}AU)x_e = x_e^{\mathrm{T}}A'x_e.$$

Итак, функция f в новом базисе также записывается при помощи квадратичной формы, причем матрица A' этой квадратичной формы связана с матрицей A исходной квадратичной формы соотношением

$$A' = U^{\mathrm{T}} A U. \tag{8.4}$$

Преобразование матрицы квадратичной формы вызывается заменой переменных (переходом от переменных x_b к переменным x_e) в соответствии с формулой (8.3).

Замечание 8.1. Замену переменных вида (8.3) с произвольной матрицей U называют ***линейной.*** Изменение базиса в линейном пространстве приводит к линейной замене переменных (8.3) с невырожденной матрицей U.

Пример 8.2. Квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + \ \ y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Эта замена переменных в матричной записи имеет вид $x = Uy$, где

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (8.4) имеем

$$A' = U^{\mathrm{T}} A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и квадратичная форма принимает вид

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.

8.3. Квадратичные формы канонического вида

Определение 8.2. *Квадратичную форму*

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.5}$$

не имеющую попарных произведений переменных, называют ***квадратичной формой канонического вида.*** Переменные $x_1, \ldots, x_n$, в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют ***каноническими переменными.***

Один из методов преобразования (или, как говорят, приведения) квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называют ***методом Лагранжа.*** Проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Пример 8.3. Рассмотрим квадратичную форму $x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных. Для преобразования ее к каноническому виду выделим полный квадрат по x_1. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним до полного квадрата:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - 2x_2$, $z_2 = 2x_2$, получим квадратичную форму канонического вида: $z_1^2 - z_2^2$. #

Как применять метод Лагранжа в общем случае? Рассмотрим квадратичную форму от n переменных общего вида (8.1). Если $a_{11} \neq 0$, соберем все слагаемые формы, содержащие переменное x_1, и дополним их слагаемыми так, чтобы получился полный квадрат. В результате получим:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n\right)^2 - a_{11}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j}^2x_j^2 -$$

$$-2a_{11}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_{1i}\alpha_{1j}x_ix_j + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_1'\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j\Bigr)^2 + f_1(x_2,\ldots,x_n),$$

где $a_1' = a_{11}$, $\alpha_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = \overline{1,n}$, а f_1 — квадратичная форма, не содержащая переменного x_1.

С квадратичной формой f_1 можно поступить аналогичным образом, выделяя полный квадрат по переменной x_2. Продолжая процесс, мы преобразуем квадратичную форму $f(x)$ к виду

$$f(x) = a_1'\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j\Bigr)^2 + a_2'\Bigl(\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j\Bigr)^2 + \ldots + a_r'\Bigl(\sum_{j=r}^{n}\alpha_{rj}x_j\Bigr)^2,$$

где коэффициенты a_j' являются ненулевыми, а $\alpha_{jj} = 1$, $j = \overline{1,r}$.

Выполним *линейную замену переменных*

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2' &= \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r' &= \alpha_{rr}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n, \\ x_{r+1}' &= x_{r+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= x_n, \end{aligned}$$

определяемую верхней треугольной матрицей U. Отметим, что диагональные элементы матрицы U равны единице, поэтому эта матрица невырождена. В результате замены переменных мы придем к квадратичной форме

$$f(x') = a_1'(x_1')^2 + \ldots + a_r'(x_r')^2,$$

имеющей канонический вид.

Изложенная схема не применима, если на каком-либо ее этапе в квадратичной форме нет соответствующего переменного во второй степени. Например, может случиться, что $a_{11} = 0$. Тогда мы вместо переменного x_1 можем остановить свой выбор на другом, квадрат которого присутствует в квадратичной форме. Но может быть так, что в квадратичной форме нет ни одного квадрата (например, $f(x_1, x_2) = x_1x_2$). Тогда перед выделением квадрата следует выполнить промежуточную замену переменных. Для этого выбираем любое слагаемое квадратичной формы. Пусть для определенности $a_{12} \neq 0$, так что присутствует слагаемое $2a_{12}x_1x_2$. После замены переменных $x_1 = x_1' + x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$, $x_3 = x_3'$, ..., $x_n = x_n'$ получим квадратичную форму, у которой присутствует квадрат переменного x_1', так как $x_1x_2 = (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = (x_1')^2 - (x_2')^2$.

Отметим, что канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, определяется неоднозначно.

Так, в примере 8.3 после дополнительной замены переменных $w_1 = z_1/2$, $w_2 = z_2/2$ получим еще одну квадратичную форму канонического вида $4w_1^2 - 4w_2^2$.

8.4. Ортогональные преобразования квадратичных форм

Как мы установили (см. **8.2**), *матрица A квадратичной формы* при переходе к новому *базису* изменяется по формуле $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, где U — *матрица перехода.* Если рассматривается *евклидово пространство*, а старый и новый *базисы* выбраны *ортонормированными*, то матрица перехода U является *ортогональной* и мы имеем дело с ***ортогональным преобразованием квадратичной формы***, т.е. преобразованием $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, в котором матрица U ортогональна.

Теорема 8.1. При ортогональном преобразовании квадратичной формы *характеристическое уравнение* ее *матрицы* не изменяется.

◄ Пусть A — матрица заданной квадратичной формы. При ортогональном преобразовании эта матрица изменяется по формуле $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, где U — ортогональная матрица. Согласно свойству 7.2, ортогональная матрица U имеет обратную, причем $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$. Поэтому $A' = U^{\mathrm{T}}AU = U^{-1}AU$, и мы видим, что матрицы A' и A подобны. Согласно теореме 5.2, характеристические уравнения подобных матриц совпадают. ►

Теорема 8.2. Любую *квадратичную форму ортогональным преобразованием* можно привести к *каноническому виду.*

◄ Матрица A данной квадратичной формы является симметрической. Но любая симметрическая матрица, согласно следствию 6.4, подобна диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Нам надо лишь убедиться, что в качестве P можно выбрать ортогональную матрицу. Тогда $A' = P^{\mathrm{T}}AP$

и диагональная матрица A' является матрицей квадратичной формы, полученной из исходной при помощи ортогонального преобразования. Диагональный вид A' равнозначен каноническому виду квадратичной формы. Чтобы выяснить характер матрицы P, нужно вспомнить теорему 6.5, из которой и было выведено упомянутое следствие 6.4.

Рассмотрим произвольное *n-мерное* евклидово *пространство* $\mathcal{E}$ (n — количество переменных в квадратичной форме) и некоторый ортонормированный базис $\boldsymbol{b}$ в этом пространстве. Матрица A является *матрицей* некоторого *самосопряженного оператора* $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Согласно теореме 6.6, существует такой ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$, что матрица A' оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе является диагональной. Согласно формуле преобразования матрицы линейного оператора, имеем $A' = P^{-1}AP$ (см. теорему 4.6), где P — матрица перехода из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{e}$. Так как оба базиса ортонормированные, матрица P является ортогональной. ►

Теорема доказана, но подход, который мы использовали в доказательстве, позволяет сделать и другие выводы, о которых в формулировке теоремы речь не идет. Во-первых, диагональными элементами матрицы A' квадратичной формы канонического вида, получающейся в результате ортогонального преобразования, являются *собственные значения матрицы* A квадратичной формы. Из этого следует, что мы можем записать матрицу A' канонического вида, не находя соответствующего ортогонального преобразования.

Во-вторых, находя ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, мы фактически ищем базис из *собственных векторов* соответствующего *самосопряженного оператора*. Действительно, если квадратичная форма и самосопряженный оператор имели в исходном ортонормированном базисе одинаковую матрицу, то и в новом ортонормированном базисе их матрицы будут совпадать.

Мы предполагаем, что квадратичная форма представляет собой запись функции, заданной в евклидовом пространстве, через *координаты вектора* в некотором ортонормированном базисе. На самом деле такая интерпретация носит чисто вспомогательный характер, помогающий смотреть на процесс с геометрической точки зрения, но она никак не используется в самом алгоритме построения ортогонального преобразования. Достаточно лишь записать матрицу квадратичной формы и применить к этой матрице процедуру приведения к диагональному виду (см. **7.4**).

Проиллюстрируем на примерах процедуру практического вычисления ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 8.4. Квадратичную форму $f(x,y) = x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных мы приводили к каноническому виду методом Лагранжа (см. пример 8.3). Теперь попробуем привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Матрица нашей квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем *характеристическое уравнение* этой *матрицы*:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0.$$

Вычисляем корни характеристического уравнения, они же собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Теперь можем записать канонический вид нашей квадратичной формы:

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2} y_1^2 + \frac{1-\sqrt{17}}{2} y_2^2.$$

Пример 8.5. Найдем канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2,$$

к которому она приводится ортогональным преобразованием, и укажем одно из таких ортогональных преобразований.

Квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

с характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 0.$$

Собственными значениями матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + 9y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем *собственные векторы матрицы* рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = 1$ находим собственный вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1\ \ -1)^{\mathrm{T}}$. Тогда вектор $\boldsymbol{e}_2 = (1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{e}_1$, будет собственным вектором с соответствующим собственным значением $\lambda_2 = 9$ (см. **7.4**). Пронормировав эти векторы, составляем из столбцов их координат *матрицу ортогонального преобразования*

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует *линейная замена переменных* $x = Py$. #

Единообразное поведение самосопряженных операторов и квадратичных форм при замене ортонормированного базиса объясняется следующей связью.

Теорема 8.3. Пусть $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Функция $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, определенная на евклидовом пространстве, является квадратичной формой. Наоборот, для любой квадратичной формы $f(\boldsymbol{x})$ на евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ существует такой самосопряженный оператор $\boldsymbol{A}$, что $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Этот оператор определен однозначно.

◄ Чтобы доказать первое утверждение теоремы, вспомним, как записывается скалярное произведение в ортонормированном базисе (см. **3.7**). Используя такую запись и учитывая самосопряженность оператора, получаем

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = x^{\mathrm{T}} A x,$$

где x — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$; A — матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$. Мы пришли к координатной записи $x^{\mathrm{T}} A x$ некоторой квадратичной формы.

Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — квадратичная форма, которая в данном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ имеет вид $f(\boldsymbol{x}) = x^{\mathrm{T}} A x$. Взяв самосопряженный оператор $\boldsymbol{A}$, который в базисе $\boldsymbol{e}$ имеет матрицу A, получаем

$$f(\boldsymbol{x}) = x^{\mathrm{T}} A x = x^{\mathrm{T}} (A x) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Наконец, докажем, что если для двух самосопряженных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выполняется равенство $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Записав указанное равенство в координатах (A, B — матрицы операторов, x — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$), получаем $x^{\mathrm{T}} A x = x^{\mathrm{T}} B x$, т.е. равенство двух многочленов второй степени от n переменных. Такое равенство возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты этих многочленов при одинаковых слагаемых равны, но это эквивалентно равенству матриц $A = B$ и, следовательно, равенству самосопряженных операторов. ►

8.5. Закон инерции

Квадратичная форма может быть приведена к различным *каноническим видам*. Например, для квадратичной формы $x_1^2 - 4x_1x_2$ найдены уже три канонических вида. Но, несмотря на многообразие канонических видов для данной квадратичной формы, имеются такие характеристики их коэффициентов, которые во всех этих канонических видах остаются неизменными. Например, если квадратичная форма преобразовалась к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2,$$

в котором все коэффициенты λ_i положительны, то соответствующая этой квадратичной форме функция в линейном пространстве принимает только неотрицательные значения. Значит никакой другой канонический вид не может иметь отрицательных коэффициентов, так как наличие отрицательных коэффициентов означает, что функция имеет и отрицательные значения. Другой важной характеристикой является ранг *матрицы квадратичной формы*.

Теорема 8.4. *Ранг квадратичной формы* не меняется при невырожденных *линейных заменах переменных* и равен:

а) числу отличных от нуля коэффициентов в любом ее каноническом виде;

б) количеству ненулевых *собственных значений матрицы* квадратичной формы (с учетом их *кратности*).

◄ При изменении *базиса линейного пространства* матрица A квадратичной формы преобразуется по формуле $A' = U^{\mathrm{T}} A U$, в которой U — *матрица перехода* (см. **8.2**). Матрица U, как матрица перехода, является невырожденной, поэтому ранг A' совпадает с рангом A, так как при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется (см. замечание 4.3).

Пусть квадратичная форма имеет два канонических вида

$$f_1(y_1, \ldots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2,$$
$$f_2(z_1, \ldots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2,$$

в которых все коэффициенты λ_i и μ_i ненулевые. Оба канонических вида — это квадратичные формы, представляющие собой одну и ту же функцию на линейном пространстве, но записанную в разных базисах. Значит, одна из этих квадратичных форм получается из другой в результате замены базиса, и ранги их матриц совпадают. Остается заметить, что ранг квадратичной формы канонического вида равен количеству ненулевых коэффициентов этой формы, т.е. в нашем случае $m-k$. Это доказывает утверждение а).

Квадратичную форму можно привести к каноническому виду *ортогональным преобразованием* (см. теорему 8.2). При этом коэффициенты квадратичной формы канонического вида (они же диагональные элементы ее матрицы) будут собственными значениями матрицы исходной квадратичной формы. Это доказывает утверждение б). ►

В различных канонических видах данной квадратичной формы остается неизменным не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и соответственно отрицательных коэффициентов. Объединяя это с доказанной теоремой, получаем следующее утверждение, называемое ***законом инерции***.

Теорема 8.5. Для любых двух канонических видов

$$f_1(y_1,\ldots,y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2, \quad \lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{8.6}$$

$$f_2(z_1,\ldots,z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2, \quad \mu_j \neq 0,\ j = \overline{1,k}, \tag{8.7}$$

одной и той же квадратичной формы:

– $m=k$ и их общее значение равно рангу квадратичной формы;

– количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_j;

– количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_j.

◀ Согласно теореме 8.4, количество ненулевых коэффициентов в квадратичных формах (8.6) и (8.7) одинаково, т.е. $m = k$. Пусть в этих канонических видах положительные коэффициенты предшествуют отрицательным, так что мы можем переписать их следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_k y_k^2, \\ f_2(z) &= \beta_1 z_1^2 + \ldots + \beta_p z_q^2 - \beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \ldots - \beta_k z_k^2, \end{aligned} \tag{8.8}$$

где $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, и $\beta_j > 0$, $j = \overline{1,k}$. Этого всегда можно добиться изменением порядка переменных. Нам нужно доказать, что $p = q$. Пусть это не так, и мы для определенности положим, что $p > q$.

Обозначим через $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}_n)$ базисы, в которых записаны канонические виды f_1 и f_2 (8.8) квадратичной формы. Покажем, что существует *ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}$ с *координатами* $y_1 \ldots, y_n$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и $z_1, \ldots, z_n$ в базисе $\boldsymbol{f}$, для которого одновременно выполняются условия $y_i = 0$, $i = \overline{p+1, n}$, и $z_j = 0$, $j = \overline{1,q}$. Действительно, координаты z_j линейным образом выражаются через координаты y_i:

$$z_j = u_{j1} y_1 + \ldots + u_{jn} y_n, \quad j = \overline{1,n},$$

причем матрица $U = (u_{ji})$ — это матрица перехода из базиса $\boldsymbol{f}$ в базис $\boldsymbol{e}$. Поэтому условия, поставленные для вектора $\boldsymbol{x}$, составляют однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_{p+1} = 0, \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_n = 0, \\ u_{11} y_1 + \ldots + u_{1n} y_n = 0, \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ u_{q1} y_1 + \ldots + u_{qn} y_n = 0 \end{cases}$$

относительно координат y_i вектора $\boldsymbol{x}$. Так как уравнений меньше числа неизвестных $(n - p + q < n)$, эта система имеет ненулевое решение. Следовательно, существует вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющий поставленным условиям. Но для этого вектора, согласно представлениям (8.8), имеем:

$$f(\boldsymbol{x}) = f_1(y_1, \ldots, y_n) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 > 0,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = f_2(z_1, \ldots, z_n) = -\beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \ldots - \beta_r z_r^2 \leqslant 0.$$

Первое неравенство является строгим, так как все координаты y_i вектора $\boldsymbol{x}$, начиная с номера $p+1$, являются нулевыми, а ненулевой вектор должен иметь хотя бы одну ненулевую координату. Два взаимоисключающих равенства показывают, что предположение $p \neq q$ не верно. Значит, $p = q$, т.е. количество положительных коэффициентов в двух канонических видах одинаково. Тогда и количество отрицательных коэффициентов у них совпадает, так как совпадает количество ненулевых коэффициентов. ►

8.6. Критерий Сильвестра

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Определение 8.3. Квадратичную форму $f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$, $x = (x_1 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$, будем называть:

– ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$);

– ***неотрицательно*** (***неположительно***) ***определенной***, если $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$) для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$;

– ***знакопеременной*** (***неопределенной***), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

Пример 8.6. Рассмотрим четыре квадратичные формы от трех переменных:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2,$$
$$f_4(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2.$$

Квадратичная форма f_1 положительно определена, так как представляет собой сумму трех квадратов и потому принимает только положительные значения, если переменные одновременно не обращаются в нуль. Квадратичная форма f_2 неотрицательно определена: будучи суммой двух квадратов она не принимает отрицательных значений, но при $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 \neq 0$ она принимает нулевые значения. Квадратичные формы f_3 и f_4 знакопеременны. Первая из них положительна при $x = (1\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{т}}$ и отрицательна при $x = (0\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$. Вторая положительна при $x = (1\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$ и отрицательна при $x = (1\ \ -1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$. Квадратичные формы f_2 и f_4 являются вырожденными, так как ранг каждой из них равен двум. #

Как следует из определения 8.3, тип квадратичной формы зависит только от множества значений, которые она принимает, но не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив *квадратичную форму* в *каноническом виде*, сразу получаем следующие критерии для типа квадратичной формы в зависимости от множества *собственных значений* ее *матрицы*.

Тип квадратичной формы	Множество собственных значений
Положительно определенная ($\forall x \neq 0: f(x) > 0$)	Все собственные значения положительны ($\lambda_i > 0,\ i = \overline{1, n}$)
Отрицательно определенная ($\forall x \neq 0: f(x) < 0$)	Все собственные значения отрицательны ($\lambda_i < 0,\ i = \overline{1, n}$)
Знакопеременная ($\exists x: f(x) > 0,\ \exists y: f(y) < 0$)	Есть собственные значения разных знаков ($\exists \lambda_i > 0,\ \exists \lambda_j < 0$)
Вырожденная ($\exists x:\ x \neq 0,\ f(x) = 0$,	Есть нулевое собственное значение ($\exists \lambda_i = 0$).

Хотя эта таблица дает удобную характеристику типам квадратичных форм, ее использование для определения типа конкретной квадратичной формы связано с вычислением собственных значений матрицы. А это достаточно трудоемкая операция. На самом деле во многих случаях тип квадратичной формы можно определить, не вычисляя собственных значений ее матрицы. Метод состоит в вычислении и проверке знаков некоторых *миноров* матрицы квадратичной формы. Введем следующие обозначения.

Пусть матрица квадратичной формы $f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Рассмотрим ***угловые миноры*** этой матрицы (которые также называют ***главными минорами***):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n-го порядка представляет собой определитель матрицы.

Теорема 8.6 (*критерий Сильвестра*). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$.

◀ Необходимость. Если квадратичная форма положительно определена, то в ее каноническом виде все коэффициенты должны быть положительны. Значит, и определитель матрицы квадратичной формы канонического вида положителен. Невырожденное преобразование квадратичной формы не меняет знака определителя, так как, согласно формуле преобразования (8.4), $\det(U^{\mathrm{T}}AU) = (\det U)^2 \det A$. Поэтому определитель матрицы исходной канонической формы тоже положителен, т.е. $\Delta_n > 0$.

Если квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных положительно определена, то квадратичная форма $f_k(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ от k переменных также положительно определена и, следовательно, определитель ее матрицы положителен. Но этот определитель совпадает с Δ_k, т.е. $\Delta_k > 0$ при $k = \overline{1, n}$.

Достаточность. Используем метод математической индукции по количеству n переменных квадратичной формы. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для всех квадратичных форм от k переменных, $k \leqslant n-1$. Рассмотрим произвольную квадратичную форму $f(\boldsymbol{x})$ с матрицей $A = (a_{ij})$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$, у которой все угловые миноры положительны. Квадратичная форма $f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ от $n-1$ переменных определена на *линейном подпространстве* $\mathcal{H}_{n-1} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$ и имеет матрицу, совпадающую с матрицей минора Δ_{n-1}. Так как все угловые миноры для Δ_{n-1}, они же угловые миноры матрицы A, положительны, согласно предположению математической индукции квадратичная форма f_{n-1} является положительно определенной. Заменой базиса $(\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_{n-1})$ подпространства $\mathcal{H}_{n-1}$ новым базисом $(\boldsymbol{f}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}_{n-1})$ мы можем привести квадратичную форму f_{n-1} к диагональному виду:

$$f_{n-1}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2, \quad \lambda_i > 0, \ i = \overline{1, n-1}. \tag{8.9}$$

В базисе $(\boldsymbol{f}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}_{n-1} \ \boldsymbol{e}_n)$ квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ имеет вид

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} x_i x_n + b_{nn} x_n^2,$$

так как при $x_n=0$ она совпадает с квадратичной формой f_{n-1}. Преобразуем последнее выражение для $f(\boldsymbol{x})$, выделяя квадраты по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(x_i+\mu_i x_n)^2+\lambda_n x_n^2,$$

где $\mu_i=b_{in}/\lambda_i$, $i=\overline{1,n-1}$, $\lambda_n=b_{nn}-\lambda_1\mu_1^2-\ldots-\lambda_{n-1}\mu_{n-1}^2$. Выполнив *линейную замену переменных* $x_i'=x_i+\mu_i x_n$, $i=\overline{1,n-1}$, $x_n'=x_n$ с невырожденной матрицей, приходим к квадратичной форме канонического вида

$$f(\boldsymbol{x})=\lambda_1(x_1')^2+\ldots+\lambda_n(x_n')^2, \tag{8.10}$$

в которой, согласно (8.9), коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ положительны. У определителя матрицы квадратичной формы знак не зависит от выбора базиса. Поэтому в представлении (8.10) имеем $\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\lambda_n>0$, так как $\Delta_n>0$. Отсюда следует, что $\lambda_n>0$, так как все остальные коэффициенты λ_i положительны. Таким образом, в представлении (8.10) все коэффициенты положительны и квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ положительно определена. ►

Следствие 8.1. Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $-\Delta_3>0$, ..., $(-1)^n\Delta_n>0$ (знаки угловых миноров чередуются начиная с минуса).

◄ Если квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена, то квадратичная форма $-f(x)$ положительно определена, и наоборот. Матрицей квадратичной формы $-f(x)$ является матрица $-A$, противоположная матрице A квадратичной формы $f(x)$. Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной формы $-f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры Δ_r', $r=\overline{1,n}$, матрицы $-A$ были положительны. Но при умножении матрицы A на число -1 все ее элементы умножаются на это число и поэтому $\Delta'_r = (-1)^r \Delta_r$, где Δ_r — угловой минор порядка r матрицы A. Таким образом, квадратичная форма $-f(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $(-1)^r \Delta_r > 0$, $r = \overline{1, n}$, и это условие эквивалентно тому, что квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена. ►

Следствие 8.2. Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

– один из угловых миноров равен нулю;

– один из угловых миноров четного порядка отрицателен;

– два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

◄ Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной — в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде. Если имеется нулевой угловой минор или один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то, согласно теореме 8.6 и следствию 8.1, эта квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. То же можно утверждать и в случае, когда есть два угловых минора нечетного порядка с разными знаками. Значит, в этих случаях квадратичная форма знакопеременная. ►

Критерий Сильвестра и его следствия показывают, что тип квадратичной формы полностью определяется свойствами ее матрицы. Поэтому термины, введенные определением 8.3, можно перенести на симметрические матрицы. В частности, симметрическую матрицу A называют ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной*** и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма. Согласно теореме 8.6 и ее следствиям, симметрическая матрица положительно определена, если все ее угловые миноры положительны. Симметрическая матрица отрицательно определена, если у ее угловых миноров знаки чередуются начиная со знака минус.

Следствие 8.3. Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

◀ Если $A = (a_{ij})$ — симметрическая положительно определенная матрица порядка n, то ее первый угловой минор положителен, т.е. $a_{11} = \Delta_1 > 0$. Воспользовавшись тем, что утверждение следствия верно для диагонального элемента a_{11}, докажем что и $a_{ii} > 0$ при $i > 1$. В квадратичной форме $x^{\mathrm{т}}Ax$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}}$ сделаем замену переменных

$$x_1 = y_i, \quad x_i = y_1, \quad x_j = y_j \text{ при } j \neq 1, i.$$

В новых переменных матрица $A' = (a'_{ij})$ квадратичной формы такова, что $a_{ii} = a'_{11} > 0$. ▶

Рассмотрим примеры на применение критерия Сильвестра.

Пример 8.7. Квадратичная форма $x^{\mathrm{т}}Ax$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

положительно определена, так как $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1 > 0$.

Пример 8.8. Квадратичная форма $x^{\mathrm{т}}Ax$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_3 \neq 0$) и $\Delta_1 = 1 > 0$, а $\Delta_2 = -8 < 0$.

Пример 8.9. Квадратичная форма $2x_1x_2$ от двух переменных является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_2 = -1 \neq 0$), а $\Delta_1 = 0$.

Пример 8.10. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4 + x_4^2$ имеет угловые миноры $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 4$ и, согласно следствию 8.2, является знакопеременной. В этом можно убедиться, используя несложное преобразование вида квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^2 - x_2^2 - (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2.$$

Дополнение 8.1. Билинейные формы

Функцию $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ от двух переменных, определенную в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$, называют ***билинейной формой***, если эта функция линейна по каждому из своих аргументов, т.е. для любых действительных α и β и любых *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$ выполняются равенства

$$b(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

$$b(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}) = \alpha b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

Пример 8.11. Частным случаем билинейной формы является *скалярное произведение*. Действительно, *аксиомы* в) и г) *скалярного умножения* означают, что скалярное произведение как функция от двух переменных линейно по первому аргументу, а в силу аксиомы а) скалярное произведение линейно и по второму аргументу. #

Выберем в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ некоторый *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Для билинейной формы $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обозначим $b_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ со столбцами *координат* $x = (x_1 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{т}}$ и $y = (y_1 \ \ldots \ y_n)^{\mathrm{т}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = b\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j.$$

Используя квадратную матрицу $B = (b_{ij})$ порядка n, можем записать полученное представление в матричном виде:

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}} B y. \tag{8.11}$$

Матрицу B называют ***матрицей билинейной формы***.

Тройное произведение, стоящее в правой части (8.11), нам уже встречалось (см., например, лемму на с. 185). Кстати, эта лемма показывает, что разным билинейным формам соответствуют разные матрицы. Таким образом, билинейная форма однозначно определяется своей матрицей в произвольно выбранном базисе. Кроме того, из леммы следует, что любая функция b, имеющая представление (8.11), является билинейной формой, и B является матрицей этой билинейной формы. Основываясь на этом, выясним, как изменяется матрица билинейной формы при изменении базиса.

Пусть билинейная форма b имеет в базисе $\boldsymbol{b}$ матрицу B_b, а в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицу B_e. Обозначим через U *матрицу перехода* из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{e}$. Тогда для любых двух векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ со столбцами координат x_b, y_b в базисе $\boldsymbol{b}$ и x_e, y_e в базисе $\boldsymbol{e}$ имеем

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_b^{\mathrm{T}} A_b y_b = (U x_e)^{\mathrm{T}} A_b (U y_e) = x_e^{\mathrm{T}} (U^{\mathrm{T}} A_b U) y_e.$$

Сравнивая полученное представление с (8.11), делаем вывод, что матрица $U^{\mathrm{T}} A_b U$ является матрицей билинейной формы в базисе $\boldsymbol{e}$, т.е.

$$A_e = U^{\mathrm{T}} A_b U. \tag{8.12}$$

Представление (8.11) билинейной формы в базисе похоже на запись (8.2) *квадратичной формы* в матричном виде. Кроме того, матрица билинейной формы преобразуется по тому же закону, что и *матрица квадратичной формы* (ср. (8.4) и (8.12)). Но матрица квадратичной формы симметрическая, в то время как матрица билинейной формы, вообще говоря, нет. Для того чтобы матрица билинейной формы $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ в базисе $\boldsymbol{e}$ являлась симметрической, должны выполняться условия

$$b(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=b(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i),\quad i,j=\overline{1,n}.$$

Если $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — билинейная форма, то функция $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ в заданном базисе записывается в виде $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x^{\mathrm{T}}Bx$. Это матричное произведение представляет собой квадратичную форму от координат вектора $\boldsymbol{x}$. Матрицей этой квадратичной формы является матрица $A=0{,}5(B+B^{\mathrm{T}})$. Матрицы билинейной и квадратичной форм совпадут, если матрица B билинейной формы симметрическая.

Пример 8.12. Функция $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_2$, заданная через координаты $x=(x_1\ \ x_2)^{\mathrm{T}}$ и $y=(y_1\ \ y_2)^{\mathrm{T}}$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ двумерного линейного пространства, является билинейной формой с матрицей

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Соответствующая ей квадратичная форма имеет вид $f(\boldsymbol{x})=$ $=x_1x_2$ и матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/2&0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ порождается также и билинейной формой $b_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0{,}5x_1y_2+0{,}5x_2y_1$, имеющей матрицу A.

Определение 8.4. Билинейную форму $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ называют ***симметрической*** (***кососимметрической***), если $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=$ $=b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ $(b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Пример 8.13. Примером симметрической билинейной формы является скалярное произведение. По существу, определение 3.1 говорит, что скалярное произведение — это билинейная симметрическая форма, порождающая *положительно определенную квадратичную форму* (последнее — содержание *аксиомы* г) *скалярного произведения*). #

Если в билинейной форме $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ поменять местами переменные, то получим новую билинейную форму $b'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, матрица которой будет транспонированной к исходной. Действительно, если в некотором базисе $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}} B y$, то в том же базисе

$$b'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = y^{\mathrm{T}} B x = (y^{\mathrm{T}} B x)^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} y,$$

так как $y^{\mathrm{T}} B x$ — это число и транспонирование его не меняет.

Если билинейная форма $b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ симметрическая, то перестановка аргументов не меняет ее. В этом случае $b'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $B^{\mathrm{T}} = B$, т.е. матрица симметрической билинейной формы является симметрической. Верно и обратное утверждение: если матрица B билинейной форма $b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ симметрическая, то и сама билинейная форма симметрическая. Это следует из равенств

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}} B y = (x^{\mathrm{T}} B y)^{\mathrm{T}} = y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} x = y^{\mathrm{T}} B x = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Итак, для симметричности билинейной формы необходима и достаточна симметричность ее матрицы. Отметим, что если билинейная форма имеет симметрическую матрицу в одном базисе, то ее матрица будет симметрической и в любом другом базисе. Случай косимметрической билинейной формы аналогичен. Для того чтобы билинейная форма была кососимметрической, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица в каком-либо базисе была кососимметрической.

Теорема 8.7. Для любой квадратичной формы $f(\boldsymbol{x})$ существует, и притом единственная, симметрическая билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, для которой $f(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

◀ Выберем произвольный базис $\boldsymbol{e}$ и запишем в нем матрицу A квадратичной формы $f(\boldsymbol{x})$. Билинейная форма $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ с симметрической матрицей A в этом же базисе является симметрической и порождает квадратичную форму $f(\boldsymbol{x})$ с той же матрицей A. Разные симметрические билинейные формы порождают квадратичные формы с разными матрицами. Значит, никакой квадратичной форме не могут соответствовать две различные симметрические билинейные формы. ▶

Замечание 8.2. По квадратичной форме соответствующая ей билинейная форма легко восстанавливается, при этом не нужно прибегать к записи функций в каком-либо базисе. Рассмотрим функцию

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0{,}5\bigl(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\bigr).$$

Это билинейная симметрическая форма, что следует из ее записи в произвольном базисе:

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0{,}5\bigl((x+y)^{\mathrm{T}}A(x+y) - x^{\mathrm{T}}Ax - y^{\mathrm{T}}Ay\bigr) &= \\ = 0{,}5(x^{\mathrm{T}}Ay + y^{\mathrm{T}}Ax) = 0{,}5(x^{\mathrm{T}}Ay + (y^{\mathrm{T}}Ax)^{\mathrm{T}}) &= \\ = 0{,}5(x^{\mathrm{T}}Ay + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y)/2 &= x^{\mathrm{T}}Ay, \end{aligned}$$

где A — матрица квадратичной формы $f(\boldsymbol{x})$ в этом же базисе. При этом

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = x^{\mathrm{T}}Ax = f(\boldsymbol{x}).$$

Вопросы и задачи

8.1. Найдите ранг квадратичных форм от трех переменных: а) x^2+y^2+2xz; б) $2xy+2xz+2yz$; в) $(x+y)^2-(x-y-z)^2$; г) $(x-y-2z)^2$.

8.2. Приведите к каноническому виду методом Лагранжа следующие квадратичные формы от трех переменных: а) $x^2+2y^2+2xz+2yz$; б) $2xy+2xz+2yz$; в) $x^2-y^2+2z^2+$ $+2xy+2xz$.

8.3. Приведите к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования следующие квадратичные формы от двух переменных: а) x^2+xy+y^2; б) xy; в) $2x^2+3y^2+2xy$.

8.4. Какой ранг может иметь положительно определенная квадратичная форма от n переменных?

8.5. Определите тип следующих квадратичных форм от двух переменных: а) x^2-xy+y^2; б) $2xy$; в) $x^2+4xy+4y^2$.

8.6. Квадратичная форма от двух переменных имеет вид $ax^2+bxy+cy^2$, т.е. является квадратным трехчленом относительно любой из переменных. Как тип квадратичной формы связан с дискриминантом этого квадратного трехчлена?

8.7. Выясните, являются ли положительно определенными следующие квадратичные формы от трех переменных: а) $x^2+y^2-z^2+2xy+2xz+2yz$; б) $xy+xz+yz$; в) $x^2+y^2+z^2+2xy$; г) $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$.

9. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.1. Поверхности второго порядка

Рассмотрим *линейное арифметическое пространство* $\mathbb{R}^n$, являющееся *евклидовым пространством* со *стандартным скалярным произведением:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. *Векторы* из $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать как геометрические векторы в „точечном" трехмерном пространстве или соответственно двумерном пространстве (плоскости). Зафиксировав в трехмерном пространстве точку, мы можем считать ее стандартным началом каждого вектора, а тогда каждая точка пространства определяется как конец некоторого геометрического вектора.

Эту точку зрения можно обобщить на линейное арифметическое пространство произвольной *размерности*. Векторы в $\mathbb{R}^n$ будем трактовать как точки. Некоторую фиксированную точку O (другими словами, вектор) и *ортонормированный базис* $\boldsymbol{e}$ в $\mathbb{R}^n$ назовем ***прямоугольной системой координат в*** $\mathbb{R}^n$, точку O — ***началом системы координат. Координатами*** произвольной ***точки*** M (это тоже вектор из $\mathbb{R}^n$) в этом пространстве назовем координаты вектора $M - O$ относительно базиса $\boldsymbol{e}$.

Приведенное обобщение позволяет с единых позиций анализировать геометрию плоскости и трехмерного пространства. Оно также позволяет дать геометрическую интерпретацию некоторым объектам арифметического пространства. Например, множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с геометрической точки зрения представляет собой *линейное подпространство* арифметического пространства соответствующей размерности. А чем с геометрической точки зрения является множество решений неоднородной системы? Как представить множество решений алгебраического уравнения второй степени, если переменных в этом уравнении четыре или больше?

Определение 9.1. ***Поверхностью второго порядка в*** $\mathbb{R}^n$ называют множество точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, координаты $x = (x_1 \; \ldots \; x_n)^{\mathrm{T}}$ которых в данной прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \tag{9.1}$$

где a_{ij}, b_k, c — действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, отличен от нуля.

Замечание 9.1. Поверхность второго порядка в $\mathbb{R}^n$ при $n=3$ представляет собой обычную поверхность в пространстве, а при $n=2$ — кривую на плоскости.

Уравнение (9.1) удобно записывать в матричной форме, полагая $a_{ij} = a_{ji}$ при $i > j$ и сводя все коэффициенты a_{ij} в симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n, а слагаемые b_k — в столбец $b = (b_1 \; \ldots \; b_n)^{\mathrm{T}}$:

$$x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x + c = 0. \tag{9.2}$$

В левой части уравнения (9.2) слагаемые естественным образом распались на три группы. Первая группа представляет собой *квадратичную форму* $x^{\mathrm{T}}Ax$ от координат точки. Ее называют ***квадратичной формой поверхности*** (9.1) (***кривой*** при $n=2$) ***второго порядка.*** Вторая группа представляет собой линейные слагаемые. Ее можно трактовать как координатную запись удвоенного скалярного произведения вектора $\boldsymbol{b}$ со столбцом координат b на вектор $\boldsymbol{x}$ со столбцом координат x. Третья группа в левой части (9.2) представлена одним слагаемым c.

9.2. Изменение системы координат

Пусть даны старая *прямоугольная система координат*, состоящая из *ортонормированного базиса* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ и ее *начала* в точке $\boldsymbol{b}_0$, и новая система координат, состоящая из ортонормированного базиса $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{c}_n)$ и начала $\boldsymbol{c}_0$. Рассмотрим произвольную *точку* $\boldsymbol{x}$ с *координатами* x_b и x_c соответственно в старой и новой системах координат.

Из определения координат точки в $\mathbb{R}^n$ имеем соотношения

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}x_b, \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}x_c.$$

Приравнивая выражения для $\boldsymbol{x}$, получаем

$$\boldsymbol{b}x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{c}x_c + \boldsymbol{c}_0. \tag{9.3}$$

Пусть U — *матрица перехода* из ортонормированного базиса $\boldsymbol{b}$ старой системы координат в ортонормированный базис $\boldsymbol{c}$ новой системы координат. Тогда U — *ортогональная матрица* (см. теорему 7.5) и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$. Подставляя это представление для $\boldsymbol{c}$ в равенство (9.3), находим

$$\boldsymbol{b}x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}U x_c + \boldsymbol{c}_0,$$

или

$$\boldsymbol{b}(x_b - U x_c) = \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0. \tag{9.4}$$

Координаты вектора $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0$ относительно базиса $\boldsymbol{b}$ представляют собой координаты точки $\boldsymbol{c}_0$ (начала новой системы координат) относительно старой системы координат, которые мы обозначим через $c_{0,b}$: $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}c_{0,b}$. С учетом этого равенства преобразуем правую часть (9.4): $\boldsymbol{b}(x_b - Ux_c) = \boldsymbol{b}c_{0,b}$. Отсюда следует, что

$$x_b = Ux_c + c_{0,b}. \tag{9.5}$$

Соотношение (9.5) представляет собой формулу преобразования координат при изменении системы координат.

Если $c_{0,b} = 0$, т.е. начала старой и новой систем координат совпадают, то преобразование координат принимает вид

$$x_b = Ux_c. \tag{9.6}$$

В двумерном случае при дополнительном условии $\det U = 1$ преобразование (9.6) представляет собой поворот системы координат вокруг неподвижного начала системы координат. В трехмерном случае при том же условии $\det U = 1$ это преобразование является поворотом системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Ось поворота определяется *собственным вектором* матрицы U с *собственным значением* 1. Если $\det U = -1$, то преобразование системы координат кроме поворота включает преобразование симметрии относительно некоторой плоскости или сводится к одной симметрии.

Пример 9.1. Преобразование системы координат с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

состоит в повороте на угол φ вокруг третьего вектора исходного базиса и последующей симметрии относительно плоскости, которой параллельны первые два вектора (при повороте эта плоскость перейдет в себя). #

По аналогии с двумерным и трехмерным случаями условно назовем замену (9.6) при произвольном n ***поворотом системы координат*** в случае $\det U = 1$ и ***поворотом системы координат с отражением*** (***симметрией***) в случае $\det U = -1$. Введенные термины условны потому, что в n-мерном пространстве при $n > 3$ теряется наглядный смысл понятия „поворот“.

Если в преобразовании (9.5) матрица U является единичной, т.е. $U = E$, то старая и новая системы координат имеют один и тот же ортонормированный базис. В этом случае преобразование координат имеет вид

$$x_b = x_c + c_{0,b}. \tag{9.7}$$

При $n = 2, 3$ такое преобразование означает параллельный перенос системы координат, при котором направления осей координат не изменяются. В общем случае (при $n > 3$) преобразование (9.7) мы также будем называть ***параллельным переносом системы координат***.

Любое преобразование координат вида (9.5) можно представить как последовательное применение двух преобразований $x' = Ux_c$ и $x_b = x' + c_{0,b}$, которые означают параллельный перенос исходной системы координат в точку $\mathbf{c}$ и последующий ее поворот (возможно, с отражением), определяемый матрицей U.

9.3. Упрощение уравнения поверхности второго порядка

Один из подходов к анализу *поверхности второго порядка* в $\mathbb{R}^n$, заданной уравнением (9.2), состоит в подборе такой *прямоугольной системы координат*, в которой уравнение принимает наиболее простой вид.

Изменение системы координат приводит к преобразованию исходных *координат x точки* к ее новым координатам y по формуле

$$x = Uy + y_0,$$

где y_0 — координаты *начала* новой *прямоугольной системы координат* относительно старой (см. (9.5)), а U — *ортогональная матрица.* При этом преобразовании уравнение (9.2) трансформируется к виду

$$(Uy+y_0)^{\mathrm{T}}A(Uy+y_0)+2b^{\mathrm{T}}(Uy+y_0)+c=0,$$

или

$$y^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}AUy+2(b^{\mathrm{T}}U+y_0^{\mathrm{T}}AU)y+y_0^{\mathrm{T}}Ay_0+2b^{\mathrm{T}}y_0+c=0. \qquad (9.8)$$

Уравнение (9.8) показывает, что *параллельный перенос системы координат* (в этом случае $U=E$) не изменяет *квадратичной формы поверхности второго порядка.* Квадратичная форма поверхности преобразуется по общему правилу (8.4) преобразования квадратичных форм при замене *базиса.*

Наиболее естественный способ упрощения уравнения (9.2) базируется на предварительном преобразовании квадратичной формы поверхности. Согласно теореме 8.2, существует новый *ортонормированный базис*, в котором *квадратичная форма* имеет *канонический вид.* Этот базис состоит из *собственных векторов матрицы A квадратичной формы*, записанных в исходном ортонормированном базисе. Матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису является ортогональной. Изменяя, если необходимо, направление одного собственного вектора на противоположное, можно считать, что определитель этой ортогональной матрицы положителен и потому равен единице. Значит, существует такой *поворот* исходной системы координат, что квадратичная форма поверхности (9.2) в новых переменных будет иметь канонический вид.

Пусть y_1, ..., y_n — новые координаты, в которых квадратичная форма поверхности (9.2) имеет канонический вид. Начало системы координат при этом не изменяется, и преобразованное уравнение (9.8) поверхности сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + c = 0, \tag{9.9}$$

где $(d_1 \ \ldots \ d_n)^{\mathrm{т}} = d = U^{\mathrm{т}} b$, а λ_i, $i = \overline{1,n}$, представляют собой *собственные значения* матрицы A квадратичной формы поверхности, соответствующие векторам нового ортонормированного базиса. Дальнейшее определяется возможными значениями λ_i и d_i.

Для каждого значения индекса i, $i = \overline{1,n}$, возможен один из четырех случаев:

1) $\lambda_i \neq 0$, $d_i \neq 0$;
2) $\lambda_i \neq 0$, $d_i = 0$;
3) $\lambda_i = 0$, $d_i \neq 0$;
4) $\lambda_i = 0$, $d_i = 0$.

Если реализуется случай 4), то соответствующая переменная y_i вообще не входит в уравнение и мы имеем случай ***цилиндрической поверхности в*** $\mathbb{R}^n$ (при $n = 3$ такая поверхность действительно является цилиндрической [III]). В остальных случаях дальнейшее упрощение уравнения (9.9) сводится к упрощению вида линейных слагаемых.

Если в уравнении (9.9) для i-й переменной y_i реализуется случай 1), то по этой переменной можно выделить полный квадрат:

$$\lambda_i y_i^2 + 2d_i y_i = \lambda_i\Bigl(y_i + \frac{d_i}{\lambda_i}\Bigr)^2 - \frac{d_i^2}{\lambda_i}.$$

После *параллельного переноса системы координат*

$$y_i' = y_i + \frac{d_i}{\lambda_i}, \qquad y_j' = y_j, \quad j \neq i,$$

этот случай сводится к случаю 2).

Реализуем все такие параллельные переносы и, если необходимо, изменим порядок переменных (это равносильно перестановке векторов в базисе). Тогда уравнение поверхности (9.9) в новых переменных z примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + 2 \sum_{i=r+1}^{s} d_i z_i + h = 0, \tag{9.10}$$

где параметр r определяет количество переменных, для которых реализовался случай 2) (возможно, после выделения полного квадрата и соответствующего параллельного переноса). В остальных случаях реализуется случай 3) (после перестановки индексы от $r+1$ до s) или случай 4) (индексы от $s+1$ до n).

Если $s = r$, то случай 3) не встречается и в уравнении (9.10) линейные слагаемые будут отсутствовать. При $s > r+1$ случай 3) реализуется для нескольких переменных. Тогда необходим дополнительный поворот, который преобразует ситуацию к случаю $s = r+1$. Этот поворот сводится к замене переменных $z_{r+1}, \ldots, z_s$ новыми переменными $z'_{r+1}, \ldots, z'_s$, при которой

$$z'_{r+1} = \sum_{i=r+1}^{s} d'_i z_i, \quad d'_i = \gamma d_i, \ i = \overline{r+1, s},$$

$$\gamma = \Bigl(\sum_{i=r+1}^{s} (d'_i)^2 \Bigr)^{-1/2}, \tag{9.11}$$

а остальные переменные подбираются так, чтобы соответствующая замена переменных имела ортогональную матрицу U'. Эта матрица при указанной замене переменных имеет блочно-диагональную структуру:

$$U' = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

в которой блоки E представляют собой единичные матрицы порядков r и $n-s$, а блок V порядка $s-r$ отвечает переменным $z_{r+1}, \ldots, z_s$ и должен быть ортогональной матрицей.

Элементами первого столбца в этой матрице являются числа $d'_{r+1}, \ldots, d'_s$[*]. Такую матрицу можно построить, взяв вектор $\left(d'_{r+1}, \ldots, d'_s\right)$ из $(s-r)$-*мерного линейного арифметического пространства* и дополнив его в указанном пространстве до ортонормированного базиса.

Итак, после выделения квадратов и выполнения параллельного переноса мы можем, если нужно, выполнить дополнительный поворот так, что в конечном счете уравнение поверхности (9.2) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + d''_{r+1} z_{r+1} + h = 0, \tag{9.12}$$

в котором $r > 0$ (должно быть хотя бы одно слагаемое второго порядка), а коэффициент d''_{r+1} может быть нулевым.

Если $d''_{r+1} \neq 0$ и $h \neq 0$, то еще одним параллельным переносом, который определяется заменой переменного z_{r+1} по формуле

$$z'_{r+1} = z_{r+1} + \frac{h}{d''_{r+1}},$$

можно „убрать“ слагаемое h. Учитывая, что умножение уравнения на произвольное ненулевое число не меняет поверхности, мы заключаем, что исходное уравнение (9.2) путем замены системы координат приводится к одному из следующих видов:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i z_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i z_i^2 = z_{r+1}. \tag{9.13}$$

В представлениях (9.13) параметр r является *рангом квадратичной формы* поверхности второго порядка, который не

---

[*]Равенство (9.11) представляет собой первое из уравнений перехода от нового базиса к старому, которое реализуется обратной матрицей V^{-1}. Значит, первая строка матрицы V^{-1} состоит из коэффициентов в (9.11), но $V^{-1} = V^{\mathrm{T}}$, т.е. первая строка в V^{-1} является первым столбцом в V.

зависит от выбора системы координат и при описанных преобразованиях не меняется. В первом и втором случае ранг может иметь любые значения от 1 до n, в последнем случае $r < n$, т.е. этот случай возможен для поверхности второго порядка с *вырожденной квадратичной формой*.

Уравнения (9.13), к одному из которых приводится уравнение произвольной поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^n$, назовем ***уравнениями канонического вида***, а переменные, в которых они записаны, — ***каноническими***.

9.4. Примеры

Описанный выше процесс упрощения уравнения *поверхности второго порядка в* $\mathbb{R}^n$ реализуется и для кривых второго порядка на плоскости, и для поверхностей второго порядка в пространстве [III]. Рассмотрим этот процесс на конкретных примерах.

Пример 9.2. Приведем к *каноническому виду уравнение* кривой второго порядка

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 0, \tag{9.14}$$

выпишем все использованные преобразования и построим эту кривую в исходной системе координат.

Квадратичная форма кривой имеет вид $14x_1^2 + 24x_1x_2 + {}$ $+ 21x_2^2$, а *матрицей этой квадратичной формы* является

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *ортогональное преобразование*, приводящее квадратичную форму кривой к *каноническому виду*, выпишем *характеристическое уравнение матрицы* A

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 5$.

Ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ равен единице, и мы можем в системе оставить только одно уравнение — первое: $(14 - \lambda)x_1 + 12x_2 = 0$. Собственному значению $\lambda_1 = 30$ соответствует *единичный собственный вектор*

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а $\lambda_2 = 5$ — единичный собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который в двумерном случае проще найти из условия ортогональности вектору $\boldsymbol{e}_1$, т.е. путем перестановки координат вектора $\boldsymbol{e}_1$ и изменения знака у одной из координат.

Из найденных *координат* собственных *векторов* составляем *матрицу ортогонального преобразования*

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

которое является поворотом, так как $\det U = 1$. Этому ортогональному преобразованию соответствует *линейная замена переменных*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5}y_1 - \dfrac{4}{5}y_2, \\ x_2 = \dfrac{4}{5}y_1 + \dfrac{3}{5}y_2. \end{cases} \tag{9.15}$$

Чтобы получить уравнение кривой с *квадратичной формой канонического вида*, нужно подставить выражения (9.15) для переменных x_1 и x_2 в (9.14):

$$\begin{aligned}
&14x_1^2+24x_1x_2+21x_2^2-4x_1+18x_2-139=\\
&\quad=14\Big(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\Big)^2+24\Big(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\Big)\Big(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\Big)+\\
&\quad+21\Big(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\Big)^2-4\Big(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\Big)+18\Big(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\Big)-139=\\
&\quad=\Big(14\cdot\frac{9}{25}+24\cdot\frac{12}{25}+21\cdot\frac{16}{25}\Big)y_1^2+\\
&\quad+\Big(-14\cdot\frac{24}{25}-24\cdot\frac{7}{25}+21\cdot\frac{24}{25}\Big)y_1y_2+\\
&\quad+\Big(14\cdot\frac{16}{25}-24\cdot\frac{12}{25}+21\cdot\frac{9}{25}\Big)y_2^2+\\
&\quad+\Big(-4\cdot\frac{3}{5}+18\cdot\frac{4}{5}\Big)y_1+\Big(4\cdot\frac{4}{5}+18\cdot\frac{3}{5}\Big)y_2-139=\\
&\quad=30y_1^2+5y_2^2+12y_1+14y_2-139. \qquad (9.16)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что мы сразу можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным числам: $30y_1^2+5y_2^2$. Линейные слагаемые $-4x_1+18x_2=2b^{\mathrm{T}}x$, представляющие собой удвоенное скалярное произведение вектора с координатами b на вектор с координатами x, в новых переменных будет иметь вид $2(Ub)^{\mathrm{T}}y=2b^{\mathrm{T}}Uy$, или

$$\begin{aligned}
&2b^{\mathrm{T}}Uy=(-4\ \ 18)\,U\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\\
&\qquad=\frac{1}{5}(-4\ \ 18)\begin{pmatrix}3&-4\\ 4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=12y_1+14y_2.
\end{aligned}$$

Свободный член в процессе преобразования поворота не изменится. Таким образом, приходим к тому же уравнению (9.16).

По каждому из переменных выделяем полный квадрат:

$$30\left(y_1+\frac{1}{5}\right)^2+5\left(y_2+\frac{7}{5}\right)^2=150.$$

Теперь *параллельный перенос системы координат*, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} z_1=y_1+\dfrac{1}{5}, \\ z_2=y_2+\dfrac{7}{5}, \end{cases} \tag{9.17}$$

приводит к уравнению

$$30z_1^2+5z_2^2=150,$$

которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса делением на 150:

$$\frac{z_1^2}{5}+\frac{z_2^2}{30}=1.$$

Чтобы построить эллипс, заданный в исходной системе координат уравнением (9.14), можно поступить следующим образом. Изобразим исходную систему координат $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, а в ней векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти векторы откладываем от начала O системы координат, они задают координатные оси новой системы координат $O\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2$. В этой системе координат строим точку $O_1(-1/5;-7/5)$, которая должна быть началом следующей канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$. Оси этой системы координат параллельны осям $O\mathrm{y}_1$ и $O\mathrm{y}_2$.

Определив положение канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$ относительно исходной $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, строим в ней эллипс, руководствуясь величинами его большой и малой полуосей. В результате получаем расположение эллипса относительно исходной системы координат. Расположение осей трех систем координат и эллипса в данной задаче показано на рис. 9.1.

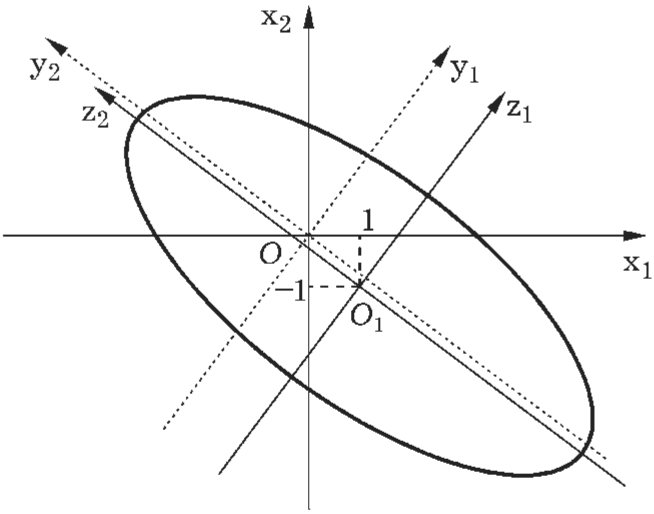


Рис. 9.1

Пример 9.3. Определим, какая кривая задается уравнением

$$32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2 + 180 = 0,$$

и изобразим ее в канонической системе координат.

Для решения поставленной задачи приведем к каноническому виду квадратичную форму $F = 32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2$ этой кривой. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} 32-\lambda & 26 \\ 26 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда находим собственные значения $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -20$. Теперь мы можем записать канонический вид квадратичной формы кривой:

$$F = 45y_1^2 - 20y_2^2.$$

Так как линейные слагаемые в исходном уравнении отсутствуют, то и после поворота, приводящего квадратичную форму кривой к каноническому виду, линейные слагаемые будут отсутствовать. Свободный член при поворотах также не изменяется. Поэтому в новой системе координат кривая будет описываться уравнением

$$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{9} = -1.$$

Мы получили уравнение гиперболы, ее положение в канонической системе координат изображено на рис. 9.2.

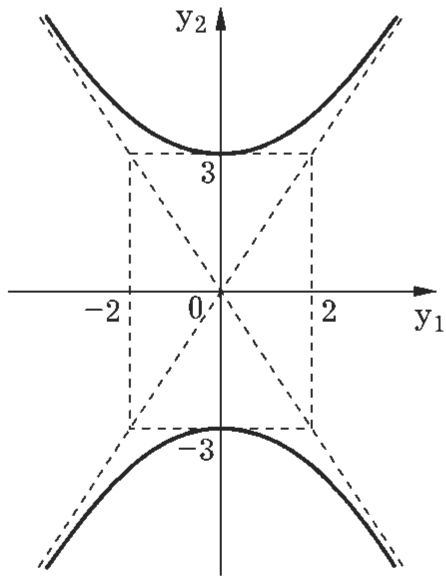


Рис. 9.2

Пример 9.4. Приведем к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 20 = 0,$$

определим ее тип и изобразим в канонической системе координат.

Как и в предыдущем примере, уравнение поверхности не содержит линейных слагаемых. Следовательно, чтобы привести уравнение к каноническому виду, достаточно привести к каноническому виду квадратичную форму поверхности. Само преобразование поворота по условию примера находить не требуется.

Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2.$$

Запишем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((4-\lambda)^2-36\big)=0.$$

Решая уравнение, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -2$. Зная их, записываем канонический вид квадратичной формы поверхности, а вместе с ним и каноническое уравнение самой поверхности:

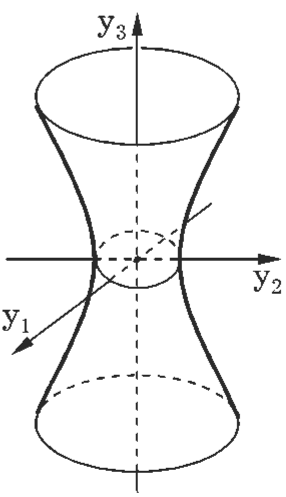


Рис. 9.3

$$y_1^2 + 10y_2^2 - 2y_3^2 - 20 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{10} = 1.$$

Видим, что полученное уравнение описывает однополостный гиперболоид (рис. 9.3).

9.5. Классификация кривых второго порядка

Кривая второго порядка на плоскости в системе координат Oxy описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов при слагаемых второй степени отличен от нуля. Это уравнение может быть преобразовано к одному из канонических видов (9.13).

В нашем случае $n=2$, так что при $r=2$ возможны лишь два варианта:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1, \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 = 0, \tag{9.18}$$

где через X, Y обозначены *канонические переменные*, а параметры α, β одновременно не равны нулю. В зависимости от знаков коэффициентов α и β в уравнениях (9.18) с учетом возможного переименования канонических переменных приходим к следующим вариантам:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{— эллипс,}$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \quad \text{— пустое множество (мнимый эллипс),}$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{— гипербола,}$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0 \quad \text{— точка (вырожденный эллипс),}$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0 \quad \text{— пара пересекающихся прямых.}$$

Если $r=1$, то *квадратичная форма кривой второго порядка вырождена* и имеет одно слагаемое. В этом случае возможны три варианта:

$$\alpha X^2=0, \qquad \alpha X^2=1, \qquad \alpha X^2=Y,$$

где $\alpha\neq 0$. В последнем варианте можно считать, что $\alpha>0$, так как иначе достаточно поменять направления *векторов базиса* и тем самым изменить знак переменной Y в правой части. Кривые с рангом квадратичной формы $r=1$ дают еще четыре канонических уравнения:

$$X^2=0 \quad \text{— двойная прямая,}$$

$$X^2=a^2,\ a\neq 0, \quad \text{— пара параллельных прямых,}$$

$$X^2=-a^2,\ a\neq 0, \quad \text{— пустое множество (пара мнимых прямых),}$$

$$X^2=2pY,\ p\neq 0, \quad \text{— парабола.}$$

9.6. Классификация поверхностей второго порядка в пространстве

Классификация *поверхностей второго порядка* в пространстве аналогична классификации кривых второго порядка на плоскости. Но количество *уравнений канонического вида* при этом возрастает.

Если *ранг квадратичной формы поверхности второго порядка* равен трем ($r=3$), то возможны два варианта (см. (9.13)):

$$\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=1, \qquad \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=0,$$

где коэффициенты α, β, γ ненулевые. С учетом возможных комбинаций знаков коэффициентов и перестановки переменных получаем следующую таблицу канонических видов:

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид,

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1$ — однополостный гиперболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}=-1$ — пустое множество (мнимый эллипсоид),

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=-1$ — двуполостный гиперболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=0$ — конус,

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}=0$ — точка (вырожденный эллипсоид).

Если ранг квадратичной формы поверхности равен двум ($r=2$), то из уравнений канонического вида (9.13) получаем два варианта:

$$\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma, \qquad \alpha X^2+\beta Y^2=Z,$$

где $\alpha, \beta \neq 0$. В первом варианте одно из переменных, Z, не входит в уравнение, и мы получаем *цилиндрическую поверхность с образующей*, параллельной оси OZ, и *направляющей* в плоскости XOY, которая является кривой второго порядка с квадратичной формой ранга 2. Направляющая определяет тип поверхности согласно классификации кривых второго порядка:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ — пустое множество (мнимый цилиндр),

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр,

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — прямая (вырожденный эллиптический цилиндр).

Во втором варианте мы получаем параболоиды. С учетом возможного изменения знаков приходим к двум каноническим уравнениям, различающимся знаками в квадратичной форме поверхности:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = Z$ — эллиптический параболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = Z$ — гиперболический параболоид.

Если ранг квадратичной формы поверхности равен единице ($r = 1$), то уравнения канонического вида (9.13) приводят к двум случаям:

$$\alpha X^2 = \gamma, \qquad\qquad \alpha X^2 = Y,$$

в которых $\alpha \neq 0$. В этих двух случаях в уравнении также отсутствует переменное Z. Значит, это цилиндрические поверхности с образующей, параллельной оси OZ, и направляющей, которая расположена в плоскости XOY и представляет собой кривую второго порядка с квадратичной формой ранга 1. Всего получается четыре варианта канонических уравнений:

$X^2 = 0$ — двойная плоскость,

$X^2 = a^2$, $a \neq 0$, — пара параллельных плоскостей,

$X^2 = -a^2$, $a \neq 0$, — пустое множество (мнимая пара плоскостей),

$X^2 = 2pY$, $p \neq 0$, — параболический цилиндр.

Вопросы и задачи

9.1. В чем состоит различие между ортонормированным базисом и прямоугольной системой координат в евклидовом пространстве?

9.2. Сколько существует канонических видов кривых второго порядка?

9.3. Можно ли прямую на плоскости задать уравнением второго порядка?

9.4. В уравнении второго порядка от двух переменных коэффициенты при квадратах переменных имеют разные знаки. Какую кривую может описывать такое уравнение?

9.5. Определите, какие кривые описываются в прямоугольной системе координат следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$;

б) $x^2 + 4xy - 5y^2 + 2y = 0$;

в) $x^2 + xy = 0$;

г) $xy + y^2 = 1$;

д) $xy + x + y + 1 = 0$.

9.6. Квадратичная форма в уравнении второго порядка от трех переменных является положительно определенной. Какую поверхность может описывать это уравнение?

9.7. Определите, какие поверхности описываются в прямоугольной системе координат следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + y = 0$;

б) $xy + xz + yz = 1$;

в) $x^2 + 4xy + y^2 + 2xz + z^2 = 5$.

9.8. Приведите к каноническому виду следующие уравнения второго порядка и постройте кривые в исходной системе координат:

а) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 19x - 8y + 4 = 0$;

б) $10x^2 + 12xy + 5y^2 + 4x - 6y = 0$;

в) $15x^2 + 16xy - 15y^2 + 44x + 62y + 13 = 0$;

г) $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 34x + 62y - 98 = 0$.

9.9. Приведите к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка и постройте эти поверхности в канонической системе координат:

а) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$;

б) $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_1x_3 = 2$;

в) $2x_1^2 + 3x_2 + 2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 + 2x_2 - 4x_3 = 1$;

г) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 32x_1 + 44x_2 + {}$ $+ 20x_3 = 15$;

д) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_26x_3 - 3 = 0$;

е) $x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$;

ж) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 18x_1 - 36x_3 + {}$ $+ 9 = 0$.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В различных приложениях наряду со *скалярными* и *векторными* величинами активно используются и тензорные величины. Понятие тензора можно вводить по-разному. Согласно одному из подходов, говорят, что в линейном пространстве задан тензор, если каждому базису в соответствие поставлена упорядоченная система чисел (компонент тензора) и преобразование этой системы при переходе из одного базиса в другой подчиняется определенному закону. Компоненты тензора нумеруются, как правило, несколькими индексами, которые ставятся не только внизу, но и вверху буквенного обозначения. В рамках тензорного исчисления разрабатываются приемы и правила преобразований компонент тензоров при операциях над ними.

10.1. Сопряженное пространство

Определение 10.1. Отображение $f\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, которое определено на *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ и принимает действительные значения, называют ***линейной функцией*** (также ***линейной формой***, ***линейным функционалом***), если оно удовлетворяет двум условиям:

а) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$;

б) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Сравнив данное определение с определением 4.1 *линейного оператора*, увидим много общего. Если рассматривать множество действительных чисел как одномерное линейное пространство, то можно сказать, что линейная функция — это линейный оператор, пространство образов которого одномерно.

Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Тогда для любого *вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ с *координатами* $x = (x_1 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = \\ = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = ax,$$

где $a = (a_1 \ \ldots \ a_n)$, $a_i = f(\boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1,n}$. Поэтому линейная функция однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Наоборот, если функция $f(\boldsymbol{x})$ через координаты x вектора $\boldsymbol{x}$ выражается в виде $f(\boldsymbol{x}) = ax$, то эта функция линейная, а строка a составлена из значений этой функции на базисных векторах. Таким образом, между множеством линейных форм, заданных на линейном пространстве $\mathcal{L}$, и строками длины n установлено взаимно однозначное соответствие.

Линейные формы можно складывать и умножать на действительные числа согласно правилам:

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}).$$

Введенные таким способом операции превращают множество линейных форм в пространстве $\mathcal{L}$ в линейное пространство. Это линейное пространство называют ***сопряженным пространством*** по отношению к линейному пространству $\mathcal{L}$ и обозначают $\mathcal{L}^*$.

Опираясь на базис $\boldsymbol{e}$, выбранный в пространстве $\mathcal{L}$, построим базис в сопряженном пространстве $\mathcal{L}^*$. Для каждого вектора $\boldsymbol{e}_i$ из базиса $\boldsymbol{e}$ рассмотрим линейную форму f^i, для которой $f^i(\boldsymbol{e}_i) = 1$ и $f^i(\boldsymbol{e}_j) = 0$ для всех векторов $\boldsymbol{e}_j$, кроме $\boldsymbol{e}_i$. Мы получим систему линейных форм $f^1, \ldots, f^n \in \mathcal{L}^*$. Покажем, что это *линейно независимая система*. Пусть некоторая *линейная комбинация* этих форм равна нулевой линейной форме $f = \alpha_1 f^1 + \ldots + \alpha_n f^n = 0$. Форма f на всех базисных векторах принимает нулевые значения. Но

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{e}_i) = (\alpha_1 f^1 + \ldots + \alpha_n f^n)(\mathbf{e}_i) = \\
= \alpha_1 f^1(\mathbf{e}_i) + \ldots + \alpha_i f^i(\mathbf{e}_i) + \ldots + \alpha_n f^n(\mathbf{e}_i) = \\
= \alpha_1 \cdot 0 + \ldots \alpha_i \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}
$$

Нулевые значения f на базисных векторах эквивалентны равенствам $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, и поэтому система линейных форм f^1, ..., f^n линейно независима.

Система линейных форм f^1, ..., f^n является базисом в сопряженном пространстве. Действительно, так как это линейно независимая система линейных форм, то достаточно доказать, что любая линейная форма из $\mathcal{L}^*$ является их линейной комбинацией. Выберем произвольную линейную форму f из $\mathcal{L}^*$ и пусть a_1, ..., a_n — значения формы f на базисных векторах. Эти значения однозначно определяют линейную форму. Но линейная комбинация $f' = a_1 f^1 + \ldots + a_n f^n$ также является линейной формой, которая на базисных векторах принимает те же значения a_1, ..., a_n. Значит, эти две линейные формы совпадают, и мы получаем равенство $f = f' = a_1 f^1 + \ldots + a_n f^n$, т.е. разложение произвольно выбранной линейной формы по системе форм f^1, ..., f^n.

Приведенное рассуждение показывает, что сопряженное пространство $\mathcal{L}^*$ имеет ту же *размерность*, что и $\mathcal{L}$. Построенный нами базис f^1, ..., f^n зависит от выбора базиса $\mathbf{e}$ в пространстве $\mathcal{L}$.

Определение 10.2. *Базисы* $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$ и f^1, ..., f^n *линейного пространства* $\mathcal{L}$ и сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ называют ***биортогональными***, или ***взаимными***, если

$$
f^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}
$$

Если базисы $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ и f^1, ..., f^n взаимны, то координатами произвольной формы f в базисе f^1, ..., f^n являются значения этой формы на векторах взаимного базиса $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. При совместном рассмотрении линейного пространства $\mathcal{L}$ и сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ элементы каждого из этих пространств называют векторами, но элементы сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ именуют ***ковариантными векторами*** (***ковекторами***), а элементы из линейного пространства $\mathcal{L}$ — ***контравариантными векторами*** (или просто векторами). Координаты тех и других определяются преимущественно во взаимных базисах, при этом у координат контравариантных векторов индекс ставится вверху, а у ковариантных — внизу.

На запись $f(\boldsymbol{x})$ можно смотреть двояко. Зафиксировав форму f, мы варьируем вектор $\boldsymbol{x}$, получая всевозможные значения линейной формы. Но если мы зафиксируем вектор $\boldsymbol{x}$ и будем варьировать линейную форму f, то получим функцию, определенную на сопряженном пространстве $\mathcal{L}^*$. Нетрудно убедиться, что эта функция линейная, так как, согласно определению суммы линейных форм и произведения линейной формы на число,

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}).$$

Итак, каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ соответствует линейная форма на сопряженном пространстве $\mathcal{L}$, или элемент ***двойного сопряженного пространства*** $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}^{**}$. Мы получаем отображение φ: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$. Несложно убедиться, что это *отображение линейно* и что оно *инъективно*. Из инъективности следует, что $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim \mathcal{L} = n$. Но сопряженное пространство $\mathcal{L}^*$ имеет ту же размерность, что и $\mathcal{L}$, а $\dim \mathcal{L}^{**} = \dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}$. Таким образом, размерность *линейного подпространства* $\operatorname{im} \varphi$ в $\mathcal{L}^{**}$ совпадает с размерностью всего двойного сопряженного пространства. Значит, $\operatorname{im} \varphi = \mathcal{L}^{**}$ и отображение φ является *изоморфизмом*. Обратим внимание, что этот изоморфизм не связан с выбором какого-либо базиса. Поэтому естественно отождествить линейные формы, заданные на $\mathcal{L}^*$, с элементами пространства $\mathcal{L}$. Это означает, что двойное сопряженное пространство совпадает с исходным линейным пространством: $\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}^*$ является сопряженным к $\mathcal{L}$, то и $\mathcal{L}$ является сопряженным к $\mathcal{L}^*$.

Взаимность линейного пространства и сопряженного к нему пространства указывает на симметричность связи между векторами и ковекторами. Поэтому вместо записи $f(\boldsymbol{x})$ более удобно использовать другую форму записи, симметричную: $(f, \boldsymbol{x})$. Линейные формы мы также будем теперь обозначать полужирным курсивом: $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x})$. Принятое обозначение похоже на обозначение *скалярного произведения*, но в отличие от последнего аргументы в новом обозначении берутся из разных пространств. Саму запись $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x})$ можно рассматривать как запись отображения, определенного на множестве $\mathcal{L}^* \times \mathcal{L}$, которое паре из ковектора и вектора ставит в соответствие действительное число. При этом указанное отображение линейно по каждому из аргументов.

Теорема 10.1. Пусть $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — два базиса *n-мерного линейного пространства* $\mathcal{L}$, U — матрица перехода из $\boldsymbol{b}$ в $\boldsymbol{c}$. Базисы $\boldsymbol{b}^*$ и $\boldsymbol{c}^*$ сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$, взаимные с базисами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно, связаны между собой соотношениями

$$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{b}^*(U^{\mathrm{T}})^{-1}, \qquad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{c}^* U^{\mathrm{T}}.$$

◀ Координатами $f^c = (f_1^c \ \ldots \ f_n^c)$ линейной формы $\boldsymbol{f}$ в базисе $\boldsymbol{c}^*$ являются значения этой формы на векторах базиса $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{c}_n)$. Выясним, как связаны координаты формы $\boldsymbol{f}$ в двух базисах $\boldsymbol{c}^*$ и $\boldsymbol{b}^*$.

Базисы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ связаны между собой при помощи матрицы перехода матричным соотношением $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$ (см. **1.8**). Это соотношение представляет собой равенство строк длины n, составленных из векторов. Из равенства строк векторов следует равенство строк значений линейной формы $\boldsymbol{f}$ на этих векторах:

$$\big((\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}_1)\ \ldots\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}_n)\big) = \big((\boldsymbol{f},\boldsymbol{b}_1)\ \ldots\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{b}_n)\big)U,$$

или

$$f^c = f^b U,$$

где f^b и f^c — обозначения строк координат формы $\boldsymbol{f}$ в базисах $\boldsymbol{b}^*$ и $\boldsymbol{c}^*$ соответственно. Транспонировав это равенство, мы получим принятую форму связи координат элементов линейного пространства, в которой координаты записываются по столбцам:

$$(f^c)^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}(f^b)^{\mathrm{T}}.$$

Это соотношение означает, что матрица U^{T} является матрицей перехода из базиса $\boldsymbol{c}^*$, играющего в формуле роль старого, в базис $\boldsymbol{b}^*$, играющий роль нового. Следовательно, $\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{c}^* U^{\mathrm{T}}$, откуда умножением на матрицу $(U^{\mathrm{T}})^{-1}$ получаем $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{b}^*(U^{\mathrm{T}})^{-1}$. ►

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ *евклидово*, то скалярное произведение порождает изоморфизм между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$, не зависящий от базиса, который позволяет отождествить евклидово пространство с его сопряженным. Действительно, для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathcal{L}$ отображение $\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$ представляет собой линейную форму в $\mathcal{L}$, так как скалярное произведение линейно по второму из своих аргументов. Возникает отображение ψ, которое вектору $\boldsymbol{a} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие линейную форму $f_a(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$. Это отображение линейно в силу свойств скалярного произведения и инъективно. Инъективность следует из того, что если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, то и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$, т.е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Так как линейные пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ конечномерны и имеют одинаковые размерности, отображение ψ биективно и реализует изоморфизм этих пространств. Итак, для евклидова пространства $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$. В этом смысле евклидово пространство есть „самосопряженное“ пространство.

10.2. Полилинейные формы

Пусть $\mathcal{L}$ — *n-мерное линейное пространство* и $\mathcal{L}^*$ — *сопряженное* к нему *пространство.* Рассмотрим функцию $\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q)$, аргументами которой являются p *векторов* $\boldsymbol{x}_i\in\mathcal{L}$ и q *ковекторов* $\boldsymbol{f}^j\in\mathcal{L}^*$.

Определение 10.3. Функцию φ от p векторов и q ковекторов называют ***полилинейной формой***, если она линейна по каждому отдельно взятому аргументу. Пару чисел (p,q) называют ***типом полилинейной формы.***

Пример 10.1. Простейшие полилинейные формы — это *линейные функции*, зависящие от одного аргумента. Линейные функции на $\mathcal{L}$ представляют собой ковекторы, т.е. элементы сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$. Линейные функции на $\mathcal{L}^*$ отождествляются с векторами. Таким образом, полилинейная форма типа $(1,0)$ — это ковектор, а полилинейная форма типа $(0,1)$ — это вектор.

Пример 10.2. Полилинейная форма типа $(2,0)$ — это *билинейная форма*, определенная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Аналогично полилинейная форма типа $(0,2)$ представляет собой билинейную форму на сопряженном пространстве $\mathcal{L}^*$.

Пример 10.3. Полилинейную форму $\varphi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{f})$ типа $(1,1)$ можно ассоциировать с *линейным оператором*, действующим в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Действительно, зафиксировав первый аргумент, мы получим линейную функцию на сопряженном пространстве $\mathcal{L}^*$, т.е. вектор. Таким образом, каждому вектору $\boldsymbol{x}\in\mathcal{L}$ поставлен в соответствие вектор, представленный в виде линейной формы на $\mathcal{L}^*$. Мы получаем отображение пространства $\mathcal{L}$ в себя. Покажем, что это отображение линейно.

Если вектору $\boldsymbol{x}$ соответствует линейная форма $\varphi(\boldsymbol{x};\cdot)$ на $\mathcal{L}^*$ (точка обозначает меняющийся аргумент), а вектору $\boldsymbol{y}$ соответствует линейная форма $\varphi(\boldsymbol{y};\cdot)$, то *сумме* этих *векторов* соответствует линейная форма $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y};\cdot)$, равная сумме форм:

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y};\cdot)=\varphi(\boldsymbol{x};\cdot)+\varphi(\boldsymbol{y};\cdot),$$

что следует из линейности φ по первому аргументу. Аналогично вектору $\lambda\boldsymbol{x}$ соответствует форма $\varphi(\lambda\boldsymbol{x};\cdot)$, равная $\lambda\varphi(\boldsymbol{x};\cdot)$.

Итак, любой полилинейной форме φ типа $(1,1)$ соответствует линейный оператор, действующий в $\mathcal{L}$. Можно показать, что это соответствие *биективное*, и мы можем отождествить полилинейные формы типа $(1,1)$ с линейными операторами.

Соответствие между полилинейными формами типа $(1,1)$ и линейными операторами использует ранее построенный *изоморфизм* между линейными пространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{**}$. Обратное соответствие более простое. Каждому линейному оператору $\boldsymbol{A}$ можно поставить в соответствие полилинейную форму $\varphi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ типа $(1,1)$. При фиксированном векторе $\boldsymbol{x}$ мы получаем линейную форму на сопряженном пространстве, причем эта форма отождествляется с вектором $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Значит, это действительно то же соответствие, что и рассмотренное выше. #

Полилинейные формы можно складывать по обычным правилам сложения функций: для каждой комбинации значений $p+q$ аргументов складываются значения функций. Полилинейные формы можно также умножать на действительные числа.

Теорема 10.2. Множество $\mathcal{P}_{p,q}$ полилинейных форм типа (p,q) в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ является линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

◀ Операции сложения функций и умножения функции на число удовлетворяют всем *аксиомам линейного пространства*. Поэтому нам нужно лишь показать, что в результате сложения двух форм одного типа или умножения полилинейной формы на действительное число получается полилинейная форма того же типа.

Рассмотрим полилинейные формы $\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q)$ и $\psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q)$. Их сумма представляет собой функцию $\chi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q)$, которая определяется равенством

$$\chi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q) = \\ = \varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q) + \psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q).$$

Проверим линейность этой функции, например, по первому аргументу, используя многоточия для обозначения остальных аргументов полилинейных форм:

$$\chi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1',\ldots) = \varphi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1',\ldots) + \psi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1',\ldots) = \\ = \bigl(\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\varphi(\boldsymbol{x}_1',\ldots)\bigr) + \bigl(\psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\psi(\boldsymbol{x}_1',\ldots)\bigr) = \\ = \bigl(\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)\bigr) + \bigl(\varphi(\boldsymbol{x}_1',\ldots)+\psi(\boldsymbol{x}_1',\ldots)\bigr) = \\ = \chi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\chi(\boldsymbol{x}_1',\ldots),$$

$$\chi(\lambda\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \varphi(\lambda\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\psi(\lambda\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \\ = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\lambda\psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \\ = \lambda\bigl(\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\psi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)\bigr) = \lambda\chi(\boldsymbol{x}_1,\ldots).$$

Линейность функции по остальным аргументам проверяется точно так же.

Рассмотрим теперь функцию ξ, определенную через полилинейную форму φ равенством $\xi(\ldots) = \lambda\varphi(\ldots)$. Проверим ее линейность по первому аргументу:

$$\xi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1',\ldots) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1',\ldots) = \\ = \lambda\bigl(\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\varphi(\boldsymbol{x}_1',\ldots)\bigr) = \\ = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\lambda\varphi(\boldsymbol{x}_1',\ldots) = \xi(\boldsymbol{x}_1,\ldots)+\xi(\boldsymbol{x}_1',\ldots),$$

$$\xi(\alpha\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \lambda\varphi(\alpha\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \lambda\alpha\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots) = \alpha\xi(\boldsymbol{x}_1,\ldots).$$

Линейность функции ξ по остальным аргументам проверяется аналогично. ►

Рассмотрим в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$. Используя свойства линейности полилинейной формы φ типа (p,q) по каждому аргументу, мы можем выразить ее значение на фиксированном наборе значений аргументов через ее же значения на базисных векторах. Пусть выбраны произвольные векторы $\boldsymbol{x}_i = x_i^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_i^n\boldsymbol{e}_n$, $i = \overline{1,p}$, и произвольные ковекторы $\boldsymbol{f}^i = f_1^i\mathbf{e}^1 + \ldots + f_n^i\mathbf{e}^n$, $i = \overline{1,q}$, разложенные по *взаимному базису* $\mathbf{e}^* = (\mathbf{e}^1 \ \ldots \ \mathbf{e}^n)$. Тогда

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q) =$$
$$= \varphi\Bigl(\sum_{i_1=1}^n x_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\sum_{i_p=1}^n x_p^{i_p}\boldsymbol{e}_{i_p};\sum_{j_1=1}^n f_{j_1}^1\mathbf{e}^{j_1},\ldots,\sum_{j_q=1}^n f_{j_q}^q\mathbf{e}^{j_q}\Bigr) =$$
$$= \sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_p=1}^n\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_q=1}^n x_1^{i_1}\ldots x_p^{i_p} f_{j_1}^1\ldots f_{j_q}^q \times$$
$$\times\,\varphi\bigl(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_p};\mathbf{e}^{j_1},\ldots,\mathbf{e}^{j_q}\bigr).$$

Мы видим, что набор чисел $\varphi_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \varphi\bigl(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_p};\mathbf{e}^{j_1},\ldots,\mathbf{e}^{j_q}\bigr)$ однозначно задает полилинейную форму. Ясно, что, взяв произвольный набор чисел $\varphi_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$, мы сможем определить полилинейную форму, используя эти числа как коэффициенты разложения в базисе $\boldsymbol{e}$. Таким образом, подобно тому, как каждому вектору соответствует столбец его *координат*, каждой полилинейной форме соответствует набор чисел, упорядоченных с помощью $p+q$ индексов. Эти числа назовем ***координатами полилинейной формы***. Термин оправдан, так как в линейном пространстве $\mathcal{P}_{p,q}$ несложно указать базис, в котором эти числа действительно будут координатами данной полилинейной формы. Этот базис будет состоять из n^{p+q} полилинейных форм, и поэтому $\dim\mathcal{P}_{p,q} = n^{p+q}$.

Уже по приведенной выкладке видно, что большое количество знаков суммы загромождает вычисления. Поэтому в тензорном исчислении используют ***правило суммирования по умолчанию***, или ***правило индексов***. Индексы в выражениях тензорной алгебры ставят вверху и внизу. Если в выражении какой-либо верхний индекс и какой-либо нижний индекс обозначены одинаково, то подразумевается, что по этому индексу проводится суммирование в пределах от единицы до размерности линейного пространства. При этом знак Σ суммирования опускается. Например, формулу разложения полилинейной формы в базисе в соответствии с правилом индексов записывают так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\ldots,\boldsymbol{f}^q)=\varphi_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}x_1^{i_1}\ldots x_p^{i_p}f_{j_1}^1\ldots f_{j_q}^q.$$

Далее мы будем использовать это правило.

Итак, полилинейную форму в данном базисе можно представить набором ее координат. Выясним, как изменяются эти координаты при изменении базиса. Пусть $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ и $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_1\ \ldots\ \boldsymbol{c}_n)$ — два базиса в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, $\boldsymbol{b}^*=\bigl(\boldsymbol{b}^1\ \ldots\ \boldsymbol{b}^n\bigr)$ и $\boldsymbol{c}^*=\bigl(\boldsymbol{c}^1\ \ldots\ \boldsymbol{c}^n\bigr)$ — базисы в сопряженном пространстве $\mathcal{L}^*$, взаимные с $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Обозначим через U матрицу перехода из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{c}$.

Теорема 10.3. Координаты $\tilde{\varphi}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ полилинейной формы φ в базисе $\boldsymbol{c}$ связаны с координатами $\varphi_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ этой же формы в базисе $\boldsymbol{b}$ соотношениями

$$\tilde{\varphi}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}=v_{s_1}^{j_1}\ldots v_{s_q}^{j_q}\,\varphi_{r_1\ldots r_p}^{s_1\ldots s_q}\,u_{i_1}^{r_1}\ldots u_{i_p}^{r_p},$$

где $(u_j^i)=U$ — *матрица перехода* из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{c}$; $(v_j^i)=V=U^{-1}$ — матрица обратного перехода (верхний индекс соответствует номеру строки).

◄ Координата $\tilde{\varphi}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$, соответствующая фиксированному набору индексов i_1, …, i_p, j_1, …, j_q, представляет собой значение полилинейной формы:

$$\tilde{\varphi}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}=\varphi\bigl(\boldsymbol{c}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{c}_{i_p};\boldsymbol{c}^{j_1},\ldots,\boldsymbol{c}^{j_q}\bigr).$$

Используя выражение векторов нового базиса через старый при помощи матрицы перехода

$$\boldsymbol{c}_j=\boldsymbol{b}_k u_j^k,\qquad \boldsymbol{c}^i=v_l^i\boldsymbol{b}^l,$$

находим

$$\widetilde{\varphi}^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \varphi\bigl(\boldsymbol{b}_{r_1}u^{r_1}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{b}_{r_p}u^{r_p}_{i_p}; v^{j_1}_{s_1}\boldsymbol{b}^{s_1},\ldots,v^{j_q}_{s_q}\boldsymbol{b}^{s_q}\bigr) =$$
$$= v^{j_1}_{s_1}\ldots v^{j_q}_{s_q}u^{r_1}_{i_1}\ldots u^{r_p}_{i_p}\varphi\bigl(\boldsymbol{b}_{r_1},\ldots,\boldsymbol{b}_{r_p};\boldsymbol{b}^{s_1},\ldots,\boldsymbol{b}^{s_q}\bigr) =$$
$$= v^{j_1}_{s_1}\ldots v^{j_q}_{s_q}\,\varphi^{s_1\ldots s_q}_{r_1\ldots r_p}\,u^{r_1}_{i_1}\ldots u^{r_p}_{i_p}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 10.4. Для линейного оператора $\boldsymbol{A}$ с матрицей $A = (a^i_j)$, который отождествляется с полилинейной формой типа (1,1) (см. пример 10.3), формула преобразования при переходе к новому базису, согласно теореме 10.3, имеет вид $\widetilde{a}^j_i = v^j_s\,a^s_r\,u^r_j$. Эта формула является координатной записью известной формулы $\widetilde{A} = U^{-1}AU$ преобразования матрицы линейного оператора (см. теорему 4.6).

10.3. Тензоры

Определение 10.4. Говорят, что в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ задан ***тензор типа*** (p,q)*, если каждому *базису* $\boldsymbol{b}$ в $\mathcal{L}$ сопоставлена упорядоченная система чисел $a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}(\boldsymbol{b})$, называемых ***компонентами тензора***, причем системы чисел, соответствующие разным базисам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, связаны между собой соотношениями

$$a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}(\boldsymbol{c}) = v^{j_1}_{s_1}\ldots v^{j_q}_{s_q}\,a^{s_1\ldots s_q}_{r_1\ldots r_p}(\boldsymbol{b})\,u^{r_1}_{i_1}\ldots u^{r_p}_{i_p}, \qquad (10.1)$$

где $U = (u^i_j)$ — *матрица перехода* из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{c}$; $V = (v^i_j)$ — обратная к U матрица (верхний индекс у u^i_j и v^i_j обозначает номер строки в матрице). Сумму $p+q$ называют ***валентностью тензора*** (или его ***рангом***).

Понятие тензора носит абстрактный характер: происхождение групп чисел, формирующих тензор, не играет роли.

*В литературе встречается и другой порядок составляющих в типе тензора: для p раз ковариантного и q раз контравариантного тензора тип обозначают (q,p).

Пример тензора типа (p,q) дают координаты *полилинейной формы* типа (p,q). Действительно, закон преобразования полилинейных форм при замене базиса (см. теорему 10.3) и закон преобразования тензоров того же типа (см. определение 10.4) совпадают. Верно и обратное: любой тензор можно интерпретировать как совокупность координат некоторой полилинейной формы. Если тензору типа (p,q) с компонентами $a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}(\boldsymbol{b})$ в базисе $\boldsymbol{b}$ сопоставить полилинейную форму с координатами $a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}(\boldsymbol{b})$ в том же базисе, то в силу совпадения формул преобразования и в любом другом базисе компоненты тензора будут совпадать с координатами полилинейной формы. Эти соображения показывают, что тензоры при необходимости можно трактовать как полилинейные формы и наоборот.

Исходя из определения 10.4 можно предположить, что $p>0$ и $q>0$. Но это необязательно. Например, если $p=0$, то в законе преобразования 10.1 не будет использоваться матрица U, а если $q=0$, то не будет использоваться V.

Определение 10.5. Тензор типа $(p,0)$ называют ***ковариантным***, а тензор типа $(0,q)$ — ***контравариантным***. Тензор типа (p,q) ***смешанный***, если $p>0$, $q>0$. Про такой тензор говорят, что он p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Приведем простейшие примеры тензоров.

Пример 10.5. Допустима ситуация, когда $p=q=0$. Это означает, что объект описывается одним числом (индексов нет), причем это число не зависит от выбора базиса (в законе преобразования нет суммирования и он приобретает вид $a(\boldsymbol{c})=a(\boldsymbol{b})$). Такой объект представляет собой тензор типа $(0,0)$. Его также называют ***инвариантом***. Можно также сказать, что инвариант — это попросту *скалярная величина*.

Пример 10.6. Тензор образуют координаты вектора. Это вытекает из интерпретации вектора как полилинейной формы типа $(0,1)$ (см. пример 10.1). Проверим непосредственно, что координаты вектора представляют собой тензор типа $(0,1)$. Если U — матрица перехода из старого базиса в новый, а V — обратная к U, то столбец $\widetilde{x}$ новых координат вектора $\boldsymbol{x}$ связан со столбцом x старых координат соотношением $\widetilde{x}=Vx$, а в тензорной записи это выглядит следующим образом: $\widetilde{x}^j=v_s^j x^s$. Видим, что это преобразование координат совпадает с преобразованием (10.1) при $p=0$, $q=1$.

Рассуждая аналогичным образом, убеждаемся что *ковектор* (линейная форма) представляет собой тензор типа $(1,0)$.

Пример 10.7. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в линейном пространстве $\mathcal{L}$, можно ассоциировать с полилинейной формой типа $(1,1)$ (см. пример 10.3). Это значит, что линейный оператор можно рассматривать как тензор типа $(1,1)$. Проверим это непосредственно. В данном базисе $\boldsymbol{b}$ линейный оператор описывается своей матрицей A. При переходе в новый базис $\mathbf{c}$ матрица A линейного оператора преобразуется в матрицу $\widetilde{A}$ согласно формуле $\widetilde{A}=U^{-1}AU=VAU$. Записав матрицы в тензорной форме (верхний индекс соответствует номеру строки в матрице, а нижний — номеру столбца), получим $\widetilde{a}_i^j=v_s^j a_r^s u_i^r$ (см. пример 10.4), т.е. формулу (10.1) при $p=1$, $q=1$. Значит, элементы матрицы линейного оператора при переходе в другой базис меняются как компоненты тензора типа $(1,1)$.

Пример 10.8. ***Символ Кронекера*** — это тензор δ_j^i типа $(1,1)$, который в любом базисе имеет значения $\delta_i^i=1$ для любого i и $\delta_j^i=0$, если $i\neq j$. Этот тензор соответствует *тождественному линейному оператору*, так как компоненты символа Кронекера соответствуют элементам единичной матрицы.

Пример 10.9. В *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ заданное *скалярное произведение* представляет собой *билинейную форму*, т.е. тензор g_{ij} типа $(2,0)$. Этот тензор называют ***ковариантным метрическим тензором.*** Роль такого тензора (иначе, скалярного произведения) может играть любая *симметрическая билинейная форма*, порождающая *положительно определенную квадратичную форму.*

Евклидово пространство $\mathcal{E}$ изоморфно своему сопряженному $\mathcal{E}^*$, причем изоморфизм, определяемый скалярным произведением, не связан с выбором базиса (см. **10.1**). Этот изоморфизм переносит скалярное произведение из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$, порождая тензор g^{ij} типа (0,2). Этот тензор называют ***контравариантным метрическим тензором.***

Компонентами ковариантного метрического тензора в данном базисе $\boldsymbol{e}$ являются элементы *матрицы Грама* Γ, так как, согласно определению метрического тензора, $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Матрицей контравариантного метрического тензора g^{ij} в $\boldsymbol{e}$ является матрица, обратная матрице Грама. Действительно, компоненты тензора g^{ij} — это элементы матрицы Грама Γ^* в базисе $\boldsymbol{f}$, взаимном с $\boldsymbol{e}$. Пусть U — матрица перехода из базиса $\boldsymbol{e}$ в базис $\boldsymbol{f}$. Тогда $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}U$ ($\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{e}$, как обычно, представляются в виде строк). Матрица Грама Γ^* для базиса $\boldsymbol{f}$ записывается в виде $\Gamma^* = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$. Поэтому

$$\Gamma^* = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}U = EU = U.$$

С другой стороны,

$$E = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}U)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = U^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = U^{\mathrm{T}}\Gamma,$$

откуда $U = (\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1} = \Gamma^{-1}$ и $\Gamma^* = U = \Gamma^{-1}$.

Примеры тензоров можно почерпнуть в механике и физике.

Пример 10.10. Механические свойства твердого тела связаны с его моментами инерции относительно различных осей. Пусть для простоты тело состоит из конечной совокупности материальных точек, например из N точек. Моменты инерции такого тела относительно координатных осей $O\mathrm{x}_1$, $O\mathrm{x}_2$, $O\mathrm{x}_3$ прямоугольной системы координат задаются формулами

$$I_1 = \sum_{k=1}^{N} m_k\bigl((x_k^2)^2 + (x_k^3)^2\bigr), \quad I_2 = \sum_{k=1}^{N} m_k\bigl((x_k^1)^2 + (x_k^3)^2\bigr),$$

$$I_3 = \sum_{k=1}^{N} m_k\bigl((x_k^1)^2 + (x_k^2)^2\bigr),$$

где x_k^1, x_k^2, x_k^3 — координаты k-й материальной точки; m_k — масса k-й материальной точки. Если система координат изменилась, мы получим новую тройку моментов инерции, но эта новая тройка не может быть получена из старой при помощи только матрицы перехода, так как в формулы преобразования включаются и центробежные моменты

$$I_{12} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^1 x_k^2, \quad I_{13} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^1 x_k^3, \quad I_{23} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2 x_k^3.$$

Рассмотрим совокупность чисел

$$a^{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^i x_k^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

через которые выражаются как моменты инерции (например, $I_1 = a^{22} + a^{33}$), так и центробежные моменты ($I_{ij} = a^{ij}$ при $i \neq j$). При переходе к новой системе координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ мы получим новую группу чисел $\tilde{a}^{ij}$, которая связана с исходной группой следующим образом:

$$\tilde{a}^{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{x}_k^i \tilde{x}_k^j = \sum_{k=1}^{N} m_k v_r^i x_k^r v_s^j x_k^s = v_r^i v_s^j \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^r x_k^s = v_r^i v_s^j a^{rs}$$

(в выкладке использованы закон $\tilde{x}^i = v_r^i x^r$ преобразования координат радиус-вектора точки и *правило суммирования по умолчанию* для индексов r и s). Таким образом, группа чисел a^{ij} представляет собой набор компонент тензора типа $(0, 2)$ — тензора инерции.

10.4. Операции с тензорами

Линейные операции. Мы видели, что множество *полилинейных форм* одного типа образует *линейное пространство* относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число. Каждой полилинейной форме соответствует *тензор*, и, наоборот, любой тензор можно реализовать как полилинейную форму. Значит структуру линейного пространства с множества полилинейных форм можно перенести на тензоры.

Определение 10.6. ***Суммой*** двух ***тензоров*** $\boldsymbol{A} = a_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ и $\boldsymbol{B} = b_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ типа (p,q) называют тензор $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = c_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ того же типа с компонентами

$$c_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q} = a_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q} + b_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}. \tag{10.2}$$

Нетрудно убедиться, что набор компонентов $c_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$, вычисляемых в каждом базисе по формуле (10.2), определяет тензор типа (p,q). Действительно, для двух базисов, старого $\boldsymbol{b}$ и нового $\boldsymbol{c}$, с матрицей перехода $U = (u_j^i)$ и матрицей обратного перехода $V = (v_j^i)$

$$\begin{aligned} c_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}(\boldsymbol{c}) &= a_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}(\boldsymbol{c}) + b_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}(\boldsymbol{c}) = \\ &= v_{r_1}^{j_1}\dots v_{r_q}^{j_q} a_{s_1\dots s_p}^{r_1\dots r_q}(\boldsymbol{b}) u_{i_1}^{s_1}\dots u_{i_p}^{s_p} + v_{r_1}^{j_1}\dots v_{r_q}^{j_q} b_{s_1\dots s_p}^{r_1\dots r_q}(\boldsymbol{b}) u_{i_1}^{s_1}\dots u_{i_p}^{s_p} = \\ &= v_{r_1}^{j_1}\dots v_{r_q}^{j_q}\bigl(a_{s_1\dots s_p}^{r_1\dots r_q}(\boldsymbol{b}) + b_{s_1\dots s_p}^{r_1\dots r_q}(\boldsymbol{b})\bigr) u_{i_1}^{s_1}\dots u_{i_p}^{s_p} = \\ &= v_{r_1}^{j_1}\dots v_{r_q}^{j_q} c_{s_1\dots s_p}^{r_1\dots r_q}(\boldsymbol{b}) u_{i_1}^{s_1}\dots u_{i_p}^{s_p}. \end{aligned}$$

Видно, что набор компонентов $c_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ преобразуется по тензорному закону, т.е. согласно формуле (10.2).

Введенная операция сложения тензоров одного типа согласуется с операциями сложения объектов, являющихся частными случаями тензоров. Для *векторов* тензорное сложение совпадает со сложением векторов, для *линейных* или *билинейных форм* тензорное сложение равносильно сложению функций. Наконец, тензорное сложение *линейных операторов* и их обычное сложение — одно и то же. Для полилинейных форм тензорное сложение означает сложение форм как функций.

Определение 10.7. ***Произведением тензора*** $\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ ***на действительное число*** λ называют тензор $\lambda\boldsymbol{A}$ с компонентами $\lambda a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$.

Так же как и в случае сложения тензоров, убеждаемся, что в результате умножения каждой компоненты тензора на число λ мы получаем тензор того же типа. Умножение тензора на число в частных случаях сводится к умножению на число вектора, линейной или билинейной формы, линейного оператора. В интерпретации тензора как полилинейной формы умножение тензора на число равносильно умножению функции на число.

Теорема 10.4. Множество $\mathcal{T}_{p,q}$ всех тензоров типа (p,q) в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ относительно операций сложения тензоров и умножения тензора на число является линейным пространством *размерности* n^{p+q}.

◄ Проверка *аксиом линейного пространства* не представляет сложности. Докажем утверждение о размерности пространства тензоров. Для каждого возможного набора индексов ковариантных i_1, ..., i_p и контравариантных j_1, ..., j_q рассмотрим тензор $\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ с компонентами $\left(t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_p}$, причем равны нулю все компоненты, кроме одной, индексы которой совпадают с индексами тензора: $\left(t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = 1$. Тогда любой тензор $\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ представляется в виде линейной комбинации указанных тензоров:

$$\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}.$$

Докажем, что набор тензоров $\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ образует линейно независимую систему. Возьмем линейную комбинацию этих тензоров и приравняем нулевому тензору, у которого все компоненты равны нулю: $\alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \boldsymbol{\Theta}$. В левой части равенства стоит тензор, компонентами которого являются коэффициенты $\alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ линейной комбинации. Так как этот тензор является нулевым, все его компоненты, они же коэффициенты линейной комбинации, равны нулю. Итак, из равенства нулю линейной комбинации следует равенство нулю ее коэффициентов. Значит, выбранная система тензоров линейно независима и является базисом в пространстве $\mathcal{T}_{p,q}$. Подсчитаем количество тензоров в построенном базисе. Для этого необходимо определить количество всевозможных комбинаций из $p+q$ индексов. Так как индексы меняются независимо друг от друга и каждый индекс может иметь n возможных значений, то суммарное количество индексных комбинаций равно n^{p+q}. Следовательно, и базис $\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ содержит n^{p+q} элементов, что равно размерности пространства $\mathcal{T}_{p,q}$. ►

Транспонирование. У полилинейной формы можно переставить какие-либо два аргумента одного типа (два вектора или два ковектора). В результате мы получим, вообще говоря, новую полилинейную форму. Например, при перестановке аргументов билинейной формы мы получаем новую билинейную форму, матрица которой является транспонированной к матрице исходной формы. Такая операция не меняет билинейную форму лишь в случае, когда эта форма *симметрическая*. Транспонирование матрицы в тензорной записи выглядит как перестановка местами индексов, указывающих номер строки и номер столбца.

Определение 10.8. Тензор $\boldsymbol{B} = b^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$, полученный из тензора $\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ перестановкой двух первых нижних индексов:

$$b^{j_1\ldots j_q}_{i_1 i_2\ldots i_p} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_2 i_1\ldots i_p},$$

называют ***транспонированным*** к тензору $\boldsymbol{A}$. Транспонированными называют также тензоры, полученные перестановкой любой другой пары верхних или нижних индексов.

Нужно, естественно, убедиться, что если мы переставляем два верхних или два нижних индекса, то в результате получаем набор компонент, меняющихся при замене базиса по тензорному закону (10.1). При изменении порядка индексов набор компонент тензора в данном базисе остается неизменным, но меняется порядок этих компонент. Например, компоненты тензора *валентности* 2 можно записать в матрицу. Тогда транспонирование тензора будет означать транспонирование матрицы. Но то же происходит и в общем случае. Компоненты тензора валентности $p+q$ можно рассматривать как элементы $(p+q)$-мерной матрицы (при $p+q=2$ это обычная матрица, ассоциирующаяся с квадратом, при $p+q=3$ компоненты матрицы записываются в ячейки куба и т.д.). Если фиксировать все индексы, кроме двух переставляемых, мы получим в многомерной матрице плоское сечение, представляющее собой обычную матрицу. Транспонирование тензора есть транспонирование каждого такого сечения.

Перестановка в тензоре одного верхнего и одного нижнего индекса не имеет какого-либо содержательного смысла, так как при этом нарушается тензорный закон изменения компонент. Это лучше всего наблюдать на простых тензорах типа (1,1): наличие дополнительных индексов усложняет выкладки, но не дает принципиальных изменений. Тензор типа (1,1) будем трактовать как линейный оператор. Тогда перестановка индексов в компонентах матрицы оператора означает транспонирование этой матрицы. Но транспонирование матрицы линейного оператора в разных базисах приводит к разным операторам. Чтобы такая операция была законной, нужно ограничиться рассмотрением только *евклидова пространства* и *ортонормированных базисов* в нем. В этом случае транспонирование матрицы означает переход к сопряженному оператору.

Операцию транспонирования можно усложнить, повторяя ее с разными парами индексов. Пусть, например, среди верхних индексов выбрана группа из s индексов. Используя различные перестановки в этой группе индексов, мы можем расставить эти s индексов в любом порядке. Количество вариантов есть количество *перестановок* из s элементов, которое равно $s!$ [I-2.6], [III]. Операцию множественной перестановки индексов мы также будем называть транспонированием, выделяя ***элементарное транспонирование***, заключающееся в перестановке пары индексов.

Определение 10.9. Тензор называют ***симметрическим по группе индексов***, если он не изменяется при любой перестановке в этой группе индексов. Тензор ***кососимметрический по группе индексов*** (***антисимметрический по группе индексов***), если при перестановке любой пары индексов из группы он меняет знак.

Особый интерес в связи с этим определением представляют ковариантные и контравариантные тензоры. ***Симметрический тензор*** — это ковариантный (контравариантный) тензор, симметрический по группе всех индексов. Аналогично понятие ***кососимметрического тензора***, относящееся к ковариантным или контравариантным тензорам.

Симметрирование и альтернирование. Рассмотрим группу из r верхних (нижних) индексов у тензора $\boldsymbol{A}$ типа (p,q), где $r \leqslant q$ $(r \leqslant p)$. Перестановкой этой группы индексов можно получить $r!$ тензоров $\boldsymbol{A}_\sigma$, включая исходный. Умножим сумму всех этих тензоров на число $1/r!$ Мы получим новый тензор $\boldsymbol{A}^s$:

$$\boldsymbol{A}^s = \frac{1}{r!}\sum_\sigma \boldsymbol{A}_\sigma,$$

который будет симметрическим по выделенной группе из r индексов. Описанную операцию преобразования тензора, в результате которой получается тензор, симметрический по группе индексов, называют ***симметрированием.***

В частном случае пары индексов симметрирование выглядит наиболее просто. Например, для тензора a_{ij} симметрирование состоит в получении нового симметрического тензора

$$(a^s)_{ij} = (a^s)_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}).$$

Существует также операция, которая позволяет из данного тензора получить тензор, кососимметрический по группе индексов. Рассмотрим группу из s верхних (нижних) индексов. Любой тензор $\boldsymbol{A}_\sigma$, получаемый из тензора $\boldsymbol{A}$ перестановкой этих индексов, можно описать перестановкой $\sigma = (i_1, \ldots, i_s)$ из s элементов, причем исходному тензору будет соответствовать тождественная перестановка $(1, 2, \ldots, s)$. Обозначим через $|\sigma|$ количество инверсий в перестановке σ [III] и рассмотрим сумму

$$\boldsymbol{A}^a = \frac{1}{s!}\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\boldsymbol{A}_\sigma, \tag{10.3}$$

которая берется по всем перестановкам σ из s элементов. Операцию преобразования $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^a$ называют ***альтернированием*** по указанной группе индексов. В результате альтернирования тензора получается тензор, кососимметрический по группе индексов. Действительно, перестановка двух индексов в группе меняет четность каждой перестановки σ в сумме (10.3). Значит, каждое слагаемое и вся сумма в целом меняют знак.

В случае тензора a_{ij} типа (2,0) альтернирование выглядит наиболее просто:

$$(a^a)_{ij} = -(a^a)_{ji} = \frac{1}{2}\bigl(a_{ij} - a_{ji}\bigr).$$

Произведение тензоров. Две полилинейные формы можно перемножить, образуя функцию от большего числа переменных. Например, из полилинейных форм $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^q)$ и $\psi(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_r; \boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^s)$ типов (p,q) и (r,s) можно образовать новую полилинейную форму

$$\chi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_r; \boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^q, \boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^s) = \\ = \varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^q)\,\psi(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_r; \boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^s),$$

имеющую тип $(p{+}r,\ q{+}s)$. Аналогичная операция существует и для тензоров.

Определение 10.10. ***Произведением*** двух ***тензоров*** $\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ и $\boldsymbol{B} = b^{l_1\ldots l_s}_{k_1\ldots k_r}$ типов (p,q) и (r,s) называют тензор $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ типа $(p+r, q+s)$ с компонентами

$$c^{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_s}_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_r} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \, b^{l_1\ldots l_s}_{k_1\ldots k_r}.$$

Необходимо, конечно, убедиться, что указанный набор компонент действительно представляет собой тензор, т.е. меняется при замене базиса по тензорному закону (10.1). Непосредственная проверка закона изменения достаточно сложна. Можно ее обойти следующим образом. Каждый тензор можно трактовать как полилинейную форму такого же типа. При этом произведению тензоров будет соответствовать произведение полилинейных форм, так как компонентам перемножаемых тензоров будут соответствовать координаты полилинейных форм, т.е. значения этих форм на различных комбинациях базисных векторов. Убедиться же в том, что при перемножении полилинейных форм получается полилинейная форма, несложно.

Произведение тензоров не является коммутативным. Действительно, при перестановке сомножителей меняется порядок индексов в их произведении. А это ведет к изменению результата. Чтобы проанализировать ситуацию подробнее, можно рассмотреть произведение двух *ковекторов* $\boldsymbol{A} = a_i$ и $\boldsymbol{B} = b_j$. Их тензорным произведением будет ковариантный тензор $\boldsymbol{C} = c_{ij}$ ранга 2 с компонентами $c_{ij} = a_i b_j$. Если изменить порядок сомножителей, то получим $c'_{ij} = b_i a_j = c_{ji}$, т.е. *тензор* $\boldsymbol{C}'$, *транспонированный* к тензору $\boldsymbol{C}$. Тензоры $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}'$ совпадают, если каждый из них является симметрическим. Например, если

$$f_i = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ 0, & i \neq 1; \end{cases} \qquad g_j = \begin{cases} 1, & j = 2; \\ 0, & j \neq 2, \end{cases}$$

то $c_{12} = f_1 g_2 = 1$, $c_{21} = f_2 g_1 = 0$, и поэтому $f_i \otimes g_j \neq g_j \otimes f_i$.

Умножение тензоров является ассоциативным и дистрибутивным по отношению к сложению. Это напоминает свойства умножения линейных операторов. Однако отметим, что произведением двух линейных операторов является линейный оператор, а их произведением как тензоров является тензор типа $(2,2)$, который трактовать как линейный оператор нельзя. Эти две операции принципиально разные, хотя и обладают некоторыми одинаковыми алгебраическими свойствами.

Произведение тензоров открывает возможность получать новые тензоры из тензоров более низкой валентности. Отталкиваясь от векторов и ковекторов, мы можем получать тензоры любого типа. Однако не каждый тензор может быть представлен в виде произведения тензоров. Например, билинейная форма, являющаяся произведением двух ковекторов, имеет матрицу специального вида, ранг которой равен единице. В качестве контрпримера достаточно взять билинейную форму с рангом, равным 2.

Оказывается, что любой тензор типа (p,q) может быть представлен в виде линейной комбинации элементарных тензоров вида $\boldsymbol{x}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}^p \otimes \boldsymbol{y}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{y}_q$, являющихся произведением p ковекторов $\boldsymbol{x}^i$ и q векторов $\boldsymbol{y}_j$. Действительно, вспомним базис в пространстве $\mathcal{T}_{p,q}$ тензоров типа (p,q), рассмотренный в доказательстве теоремы 10.4. Каждый из тензоров этого базиса является элементарным. Тензор $\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, у которого единичное значение имеет компонента с индексами нижними i_1, …, i_p и верхними j_1, …, j_q, является произведением

$$\boldsymbol{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \boldsymbol{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{f}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}$$

векторов базиса $(\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n)$ и ковекторов двойственного ему базиса $\left(\boldsymbol{f}^1 \ \ldots \ \boldsymbol{f}^n\right)$. Поэтому любой тензор $\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ представим в виде

$$\boldsymbol{A} = a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \boldsymbol{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{f}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}.$$

Свертывание. Если тензорное умножение позволяет получать тензоры более высокой валентности, то следующая операция, наоборот, понижает валентность тензора.

Определение 10.11. ***Сверткой тензора*** $\boldsymbol{A} - a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ типа (p,q) по одному верхнему и одному нижнему индексам, например по индексам i_1 и j_1, называют тензор $\boldsymbol{B} = b^{j_2\ldots j_q}_{i_2\ldots i_p}$ типа $(p-1,q-1)$ с компонентами

$$b^{j_2\ldots j_q}_{i_2\ldots i_p} = a^{kj_2\ldots j_q}_{ki_2\ldots i_p}.$$

Напомним, что наличие одинаковых верхнего и нижнего индексов предусматривает суммирование по этому индексу (*правило индексов*). Можно убедиться, что введенная операция приводит к тензору, т.е. для нового набора компонент остается верным закон (10.1) преобразования тензоров.

Пример 10.11. Сверткой тензора типа $(1,1)$ является тензор валентности 0, т.е. инвариант. Тензор типа $(1,1)$ представляет собой совокупность элементов матрицы линейного оператора, а его свертка — это сумма диагональных элементов матрицы оператора, т.е. не что иное, как *след матрицы линейного оператора*, который от выбора базиса не зависит. #

Говорят также о ***свертке двух тензоров***, подразумевая под этим свертку произведения этих тензоров, причем один из двух индексов, по которым выполняется свертка, относится к первому тензору, а второй — ко второму. Например, выражение $a^k_{ij}b^{rs}_k$ означает свертку тензоров $\boldsymbol{A}$ типа $(2,1)$ и $\boldsymbol{B}$ типа $(1,2)$, в результате которой получается тензор типа $(2,2)$.

Свертка тензора или двух тензоров может выполняться не по одной паре индексов, а по нескольким. Например, рассмотрим тензор a^j_i типа $(1,1)$. Произведением этого тензора на себя будет тензор $a^j_i a^l_k$ типа $(2,2)$. Это произведение можно свернуть по двум парам индексов. Получим инвариант (тензор типа $(0,0)$) $a^j_i a^i_j$, который называют инвариантом второго порядка, в отличие от инварианта первого порядка — следа линейного оператора. Отметим, что другой вариант свертки по двум парам индексов $a_i^i a_j^j$ дает квадрат инварианта первого порядка.

В евклидовом пространстве выделен *ковариантный метрический тензор* g_{ij} и *контравариантный метрический тензор* g^{ij}. Свертка тензора $\boldsymbol{A}$ типа (p,q) с g_{ij} приводит к тензору типа $(p+1,q-1)$ и представляет собой операцию ***опускания индекса тензора***, а свертка $\boldsymbol{A}$ с g^{ij} приводит к тензору типа $(p-1,q+1)$, т.е. к ***поднятию индекса тензора***. Компоненты метрического тензора в ортонормированном базисе составляют единичную матрицу. Поэтому в таком базисе опускание (поднятие) индекса выглядит как простая перестановка индекса сверху вниз (снизу вверх), т.е. различие между верхними и нижними индексами исчезает. Если рассматривается евклидово пространство и в нем только ортонормированные базисы, то все индексы можно записывать или только вверху, или только внизу. Возникающий при этом объект называют ***евклидовым тензором***.

Поливекторы. ***Поливекторами*** (***мультивекторами***) называют ковариантные и контравариантные *кососимметрические* тензоры. Контравариантный кососимметрический тензор типа $(0,q)$ называют также q-вектором, а ковариантный кососимметрический тензор типа $(p,0)$ — p-формой. В частном случае 2-форма, т.е. кососимметрический тензор типа $(2,0)$, представляет собой *кососимметрическую билинейную форму* с кососимметрической матрицей.

Легко проверить, что множество поливекторов одного типа, например $(p,0)$, образуют относительно сложения тензоров и умножения тензора на число линейное пространство. Это линейное пространство является линейным подпространством в пространстве $\mathcal{T}_{p,0}$ всех тензоров типа $(p,0)$.

Компоненты кососимметрического тензора, имеющие хотя бы одну пару одинаковых индесов, равны нулю, так как, с одной стороны, при перестановке этих индексов соответствующая компонента меняется на компоненту с противоположным знаком в силу условия кососимметричности, а с другой стороны, перестановка одинаковых индексов не приводит к изменению компоненты. Значит, валентность ненулевого поливектора не может превышать размерности n линейного пространства, поскольку у тензора валентности больше n любая компонента имеет одинаковые индексы.

У кососимметрического тензора валентности n, где n — размерность линейного пространства, имеется $n!$ ненулевых компонент. Например, для ковариантного кососимметрического тензора компонента $a_{i_1 \dots i_n}$ отлична от нуля, если все индексы различны, а все такие комбинации индексов получаются при помощи перестановок порядка n. Все ненулевые компоненты такого тензора различаются лишь знаком, так как получаются друг из друга перестановкой индексов. В частности, отсюда следует, что любые два ненулевых кососимметрических тензора валентности n одного типа могут быть получены друг из друга умножением на число. Это означает, что линейное пространство n-векторов (n-форм) является одномерным.

Итак, у любого кососимметрического тензора имеются компоненты, которые различаются лишь знаком или совпадают. Чтобы определить тензор, достаточно указать те компоненты, у которых индексы упорядочены, например, по возрастанию. Все остальные компоненты можно получить при помощи перестановки индексов. Таких ***ведущих компонент*** у ***кососимметрического тензора*** валентности p имеется $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Нетрудно увидеть, что у тензоров валентностей p и $n-p$ одинаковое количество ведущих компонент. Рассмотрим, например, p-вектор с компонентами $a^{j_1 \dots j_p}$, $j_1 < \ldots < j_p$. Каждой компоненте $a^{j_1 \dots j_p}$ сопоставим равное ей число $b^{r_1 \dots r_{n-p}}$, взяв в качестве индексов $r_1 < \ldots < r_{n-p}$ те, которых нет среди индексов $j_1, \ldots, j_p$. Можно показать, что в результате мы получим набор компонент кососимметрического $(n-p)$-вектора, соответствие не зависит от выбора базиса и является изоморфизмом линейных пространств p-векторов и $(n-p)$-векторов. Аналогичный изоморфизм существует для пространств q-форм и $(n-q)$-форм.

Произведение кососимметрических тензоров, вообще говоря, не является кососимметрическим тензором. Например, произведение $\boldsymbol{AB}$ кососимметрического тензора $\boldsymbol{A}$ типа $(p,0)$ на кососимметрический тензор $\boldsymbol{B}$ типа $(r,0)$ будет тензором типа $(p+r,0)$, который является кососимметрическим по первым p индексам и по последним r индексам, но не по всем индексам вместе. Чтобы получить кососимметрический тензор, нужно выполнить операцию альтернирования по всем индексам. В результате получится кососимметрический тензор $\boldsymbol{C}$ типа $(p+r,0)$, который обозначают $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$ и называют ***внешним произведением*** тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Пример 10.12. Внешнее произведение двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ в $\mathbb{R}^3$ представляет собой кососимметрический 2-вектор с ведущими компонентами

$$a_{12} = 0{,}5(x_1y_2 - x_2y_1),$$
$$a_{13} = 0{,}5(x_1y_3 - x_3y_1),$$
$$a_{23} = 0{,}5(x_2y_3 - x_3y_2)$$

и матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Положив $b_1 = 2a_{23}$, $b_2 = -2a_{13}$, $b_3 = 2a_{12}$, получим вектор, который совпадает с векторным произведением $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$.

Вопросы и задачи

10.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица компонентов тензора a^{ij} типа $(0,2)$ (дважды контравариантного). Найдите закон изменения матрицы A при замене базиса.

10.2. Найдите закон изменения матрицы дважды ковариантного тензора (см. задачу 10.1).

10.3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением заданы два линейно независимых вектора $\boldsymbol{a}_1 = (a_1^1,\ a_1^2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_2^1,\ a_2^2)$. Эти векторы образуют базис. Найдите базис, биортогональный базису $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

10.4. Пусть $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Найдите компоненты тензора a_j^i, соответствующего полилинейной форме $\varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, $\boldsymbol{f} \in \mathcal{L}^*$.

10.5. Пусть a_{ij} — симметрический тензор, b^{ij} — кососимметрический тензор. Докажите, что их полная свертка $a_{ij}b^{ij}$ равна нулю. Что можно сказать о тензоре $a_{ik}b^{kj}$?

10.6. Найдите полную свертку $g_{ij}g^{ij}$ двух метрических тензоров n-мерного евклидова пространства.

10.7. В условиях задачи 10.3 запишите координаты контравариантного и ковариантного метрических тензоров в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

10.8. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан тензор a_{ij} типа (2,0). При каких условиях на компоненты a_{ij} этот тензор можно рассматривать как ковариантный метрический тензор?

10.9. Найдите тензор, который получается при поднятии одного индекса: а) у метрического тензора g_{ij}; б) у символа Кронекера δ_j^i.

11. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Задача численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с невырожденной матрицей была рассмотрена в [Ш]. Методы численного решения СЛАУ можно разделить на две группы: прямые (или точные) и итерационные. В [Ш] основное внимание было уделено прямым методам. Был рассмотрен *метод Гаусса исключения неизвестных*, а также методы, основанные на *мультипликативных разложениях матриц*.

В этой главе мы сконцентрируем внимание на итерационых методах численного решения СЛАУ. Изложим также новые способы мультипликативного разложения матрицы.

11.1. Обусловленность квадратных матриц

При решении любой математической задачи важную роль играет вопрос существования и единственности решения. Но положительный ответ на этот вопрос еще не гарантирует достоверности практических результатов, которые получены в результате решения математической задачи. Поясним это подробнее.

При постановке математической задачи, как правило, имеются параметры, которые не фиксированы и могут принимать произвольные значения из некоторых интервалов. В качестве таких параметров могут рассматриваться данные измерений, результаты решения каких-то других задач, результаты экспертных оценок и т.п., которые задаются приближенно. Если при каждом допустимом наборе значений параметров (***входных данных математической задачи***) задача имеет решение, и притом единственное, то возникает зависимость решения от указанных параметров.

Результатом решения математической задачи является вычисление на основе входных данных некоторого набора числовых значений — ***выходных данных математической задачи.*** Как входные, так и выходные данные можно рассматривать в качестве элементов соответствующих *нормированных пространств.* Это позволяет сравнивать между собой различные варианты входных (выходных) данных и оценивать степень их близости, что приводит к понятию непрерывной зависимости решения задачи от входных данных.

Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ представляют собой *векторы* входных данных некоторой математической задачи, а $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ — соответствующие этим входным данным решения, или выходные данные. Скажем, что решение задачи непрерывно зависит от входных данных, если для любого $\boldsymbol{x}_0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ имеем $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| < \varepsilon$, где $\|.\|$ — некоторая *норма* в $\mathbb{R}^m$.

Математическую задачу называют ***корректной*** или ***корректно поставленной***, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если одно из трех условий нарушается (решение неединственно, не существует или нарушается требование непрерывной зависимости от входных данных), то говорят о ***некорректной математической задаче.***

Понятие корректной задачи легко конкретизировать для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с невырожденной матрицей. Напомним, СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с квадратной матрицей A порядка n имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена [III]. Входными данными задачи решения СЛАУ следует считать элементы ее матрицы и правые части уравнений.

Столбец неизвестных $\boldsymbol{x}$ и столбец правых частей $\boldsymbol{b}$ СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ можно трактовать как векторы *n-мерного линейного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$, в котором задана некоторая норма $\|\cdot\|$. Этой норме соответствует *индуцированная норма матрицы,* для которой будем использовать то же обозначение $\|\cdot\|$. Изменение входных данных означает, что наряду со СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с решением $\boldsymbol{x}$ надо рассмотреть другую ***возмущенную систему*** $\widetilde{A}\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ с матрицей $\widetilde{A} = A + \Delta A$ и столбцом правых частей $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$, которая отличается от исходной системы ***возмущением матрицы системы*** ΔA и ***возмущением столбца правых частей*** $\Delta\boldsymbol{b}$. Решением возмущенной системы будет некоторый столбец $\widetilde{\boldsymbol{x}}$, который отличается от $\boldsymbol{x}$ на столбец $\Delta\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$, называемый ***возмущением решения***. Величины $\|\Delta A\|$, $\|\Delta\boldsymbol{b}\|$ и $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ можно интерпретировать как абсолютные погрешности соответственно матрицы системы, правой части и решения, если компоненты исходной системы рассматривать как точные. При этом относительные погрешности будут выражаться формулами

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \delta\boldsymbol{b} = \frac{\|\Delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}, \quad \delta\boldsymbol{x} = \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Корректность задачи решения СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с квадратной невырожденной матрицей заключается в том, что малым относительным погрешностям матрицы системы и правой части отвечает малая относительная погрешность решения системы. Чтобы показать, что это действительно так, нужно относительную погрешность решения оценить с помощью относительных погрешностей матрицы и правой части.

Определение 11.1. Для квадратной невырожденной матрицы A величину

$$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \tag{11.1}$$

называют ее ***числом обусловленности***.

Число обусловленности матрицы всегда положительно и зависит от заданной нормы матриц. Эта характеристика имеет следующие свойства.

Свойство 11.1. Для любой невырожденной матрицы A число ее обусловленности совпадает с числом обусловленности обратной матрицы A^{-1}:

$$c(A) = c(A^{-1}).$$

◄ $c(A^{-1}) = \|A^{-1}\| \, \|(A^{-1})^{-1}\| = \|A^{-1}\| \, \|A\| = c(A)$. ►

Свойство 11.2. Если норма матриц *кольцевая*, то $c(AB) \leqslant \leqslant c(A)\,c(B)$.

◄ Согласно свойствам обратной матрицы, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, а согласно условию, что норма кольцевая, $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$. Поэтому

$$c(AB) = \|AB\| \, \|(AB)^{-1}\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \|B^{-1}\| \, \|A^{-1}\| =$$
$$= \left(\|A\| \, \|A^{-1}\|\right)\left(\|B\| \, \|B^{-1}\|\right) = c(A)\,c(B). \qquad ►$$

Свойство 11.3. Если матричная норма кольцевая, то $c(A) \geqslant 1$ для любой невырожденной матрицы A.

◄ Для единичной матрицы E, согласно равенству $EE = E$ и свойству 11.2, получаем

$$c(E) = c(EE) \leqslant c(E)\,c(E).$$

Так как $c(E) > 0$, то, сокращая в неравенстве на $c(E)$, имеем $c(E) \geqslant 1$.

Для невырожденной матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, при этом $AA^{-1} = E$. Согласно свойствам 11.1 и 11.2, заключаем, что

$$1 \leqslant c(E) = c(AA^{-1}) \leqslant c(A)\,c(A^{-1}) = (c(A))^2.$$

Значит, $c(A) \geqslant 1$, так как число обусловленности матрицы неотрицательное. ►

Свойство 11.4. Если $\|\cdot\|$ — *спектральная норма*, то число обусловленности симметрической матрицы A равно

$$c(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|},$$

где $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ — ее *собственные значения*, соответственно наибольшее и наименьшее по абсолютной величине.

◀ Спектральная норма симметрической матрицы равна максимальной из абсолютных величин $|\lambda_i|$ ее собственных значений. Действительно, если симметрическая матрица имеет порядок n, то в $\mathbb{R}^n$ существует *ортонормированный базис* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из ее *собственных векторов*. Пусть соответствующие им собственные значения связаны неравенствами $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ имеем

$$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n)\| = \|\lambda_1\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n\boldsymbol{e}_n\| =$$
$$= \sqrt{(\lambda_1\alpha_1)^2 + \ldots + (\lambda_n\alpha_n)^2} \leqslant |\lambda_1|\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} = |\lambda_1|\,\|\boldsymbol{x}\|.$$

Поэтому

$$\|A\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\| \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant |\lambda_1|.$$

Но на самом деле в приведенном неравенстве должен стоять знак равенства, так как для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ имеем

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\|\lambda_1\boldsymbol{e}_1\|}{\|\boldsymbol{e}_1\|} = |\lambda_1|.$$

Отметим, что если λ — собственное значение невырожденной матрицы A, то λ^{-1} — собственное значение матрицы A^{-1}, так как равенство $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, равносильно равенству $A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$. Кроме того, если A — симметрическая матрица, т.е. $A^{\mathrm{T}} = A$, то и A^{-1} — симметрическая матрица, так как $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1}$. Поэтому, если $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — соответственно наибольшее и наименьшее по абсолютной величине собственные значения матрицы A, то $\|A\| = |\lambda_{\max}|$, $\|A^{-1}\| = |\lambda_{\min}^{-1}|$. Следовательно, $c(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = |\lambda_{\max}|\,|\lambda_{\min}^{-1}|$. ▶

Число обусловленности матрицы A в значительной степени определяет чувствительность СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ к погрешностям в коэффициентах матрицы и в правых частях уравнений: чем больше это число, тем выше погрешность решения при данном уровне погрешностей входных данных. Эту связь показывает следующая теорема.

Теорема 11.1. Если матрица A невырождена и

$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}, \tag{11.2}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная кольцевая норма матриц, то матрица $\widetilde{A} = A + \Delta A$ тоже невырождена и верна следующая оценка для относительной погрешности решения

$$\delta \boldsymbol{x} \leqslant \frac{c(A)}{1 - c(A)\delta A}(\delta A + \delta \boldsymbol{b}), \tag{11.3}$$

где $\delta \boldsymbol{x} = \|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| / \|\boldsymbol{x}\|$; $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — решение возмущенной системы $\widetilde{A}\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$; $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}$. #

Замечание 11.1. Если выполняется неравенство (11.2), то

$$c(A)\delta A = \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \|\Delta A\| \, \|A^{-1}\| < 1.$$

В этом случае в правой части неравенства (11.3) деления на нуль нет, и она положительная.

11.2. *QR*-разложение. Сингулярное разложение

Одним из вариантов *мультипликативного разложения матрицы* является ***QR*-разложение**, т.е. представление матрицы A в виде $A = QR$, где Q — *ортогональная матрица*, а R — верхняя треугольная матрица.

Построение QR-разложения матрицы A сводится к преобразованию этой матрицы путем последовательного умножения на ортогональные матрицы P_1, P_2, ..., P_s специального вида так, чтобы в результате получилась верхняя треугольная матрица $R = P_s \ldots P_1 A$. Полагая $Q = (P_s \ldots P_1)^{-1}$, получаем представление $A = QR$, где матрица Q, согласно свойствам 7.4 и 7.5 ортогональных матриц (см. с. 200), является ортогональной.

Применяют два основных способа построения последовательности матриц $P_1, \ldots, P_n$. Для описания этих способов удобно интерпретировать ортогональные матрицы как *матрицы ортогональных операторов* в *стандартном ортонормированном базисе* в $\mathbb{R}^n$, а матрицу A как набор столбцов $a_1, \ldots, a_n$, представляющих собой *координаты векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ из $\mathbb{R}^n$. Тогда $OA = O(a_1 \ \ldots \ a_n) = (Oa_1 \ \ldots \ Oa_n)$, где использованы свойства умножения блочных матриц, и поэтому умножение матрицы A слева на ортогональную матрицу O равносильно применению к каждому из векторов $\boldsymbol{a}_i$ ортогонального оператора $\boldsymbol{O}$, матрицей которого является O. Таким образом, задача сводится к последовательности *ортогональных преобразований системы векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, в результате которой столбцы координат этой системы образуют верхнюю треугольную матрицу.

Метод вращений. В качестве элементарного ортогонального преобразования рассмотрим преобразование поворота $\boldsymbol{Q}_{ij}(\varphi)$ в двумерном подпространстве, образованном i-м и j-м векторами *стандартного базиса* в $\mathbb{R}^n$ (это подпространство естественно ассоциировать с плоскостью). Матрица такого преобразования имеет вид

$$Q_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & & -\sin\varphi & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \sin\varphi & & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

и отличается от единичной элементами на пересечении i-й и j-й строк, i-го и j-го столбцов. Эти элементы образуют матрицу

второго порядка
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$
которая на плоскости (в пространстве V_2) определяет поворот вектора на угол φ. Если применениить преобразование с матрицей $Q_{ij}(\varphi)$ к произвольному вектору $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то изменятся только его i-я и j-я координаты, а остальные останутся прежними. При этом за счет выбора угла φ можно добиться, чтобы j-я координата вектора обнулилась. Для этого при $i < j$ достаточно выбрать φ из условия
$$\alpha_i \sin\varphi + \alpha_j \cos\varphi = 0.$$

Рассмотрим последовательность преобразований $\boldsymbol{Q}_{1j}(\varphi_{1j})$, $j = \overline{2, n}$, в результате которых вектор $\boldsymbol{a}_1$, представленный первым столбцом матрицы A, превратится в вектор $\boldsymbol{a}_1^1 = \left(a_{11}^1 \ 0 \ \ldots \ 0\right)^{\text{т}}$. При этом векторы $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, представленные остальными столбцами матрицы A, преобразуются в некоторые векторы $\boldsymbol{a}_2^1, \ldots, \boldsymbol{a}_n^1$ с координатами $\left(a_{1l}^1 \ \ldots \ a_{nl}^1\right)^{\text{т}}$, $l = \overline{2, n}$. Далее рассмотрим последовательность преобразований $Q_{2j}(\varphi_{2j})$, $j = \overline{3, n}$, при которой вектор $\boldsymbol{a}_2^1$ переходит в вектор $\boldsymbol{a}_2^2 = \left(a_{12}^1 \ a_{22}^2 \ 0 \ \ldots \ 0\right)^{\text{т}}$. При этом вектор $\boldsymbol{a}_1^1$ не изменится, так как преобразуются лишь те координаты, которые у этого вектора равны нулю. Продолжая процесс, мы получим систему векторов $\boldsymbol{a}_1^1, \ldots, \boldsymbol{a}_n^n$, координаты которых составляют верхнюю треугольную матрицу. Последовательность ортогональных матриц $Q_{ij}(\varphi_{ij})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$, и есть искомая последовательность $P_1, \ldots, P_s$.

Метод отражений. В этом методе в качестве элементарных ортогональных преобразований берут преобразования симметрии. Рассмотрим произвольный *ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}_0$ из $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{H}^\perp$ — *ортогональное дополнение* одномерного *линейного подпространства* $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_0\}$. Согласно следствию 3.1, каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ представляется в виде $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_\perp$, где $\lambda\boldsymbol{x}_0$ — *ортогональная проекция* вектора $\boldsymbol{x}$ на $\mathcal{H}_0$, а $\boldsymbol{x}_\perp$ — его *ортогональная составляющая*. Рассмотрим преобразование

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}(\lambda\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_\perp) = \boldsymbol{x}_\perp - \lambda\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x} - 2\lambda\boldsymbol{x}_0$$

(рис. 11.1). Нетрудно показать, что это преобразование является линейным. Кроме того, согласно *теореме Пифагора*,

$$\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}_\perp\|^2 + \|\lambda\boldsymbol{x}_0\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

(здесь рассматривается *евклидова норма*, соответствующая *стандартному скалярному произведению* в $\mathbb{R}^n$). Поэтому линейный оператор $\boldsymbol{Q}$ является ортогональным.

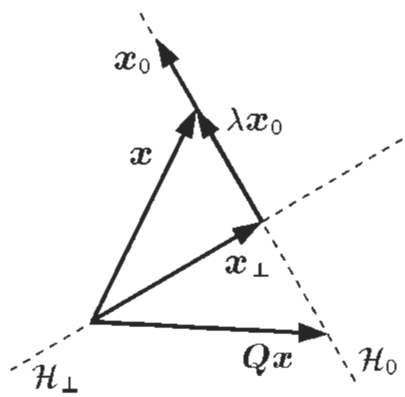


Рис. 11.1

Лучше всего в качестве вектора $\boldsymbol{x}_0$ взять вектор $\boldsymbol{n}$ с единичной нормой. Тогда $\lambda = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$, а линейный оператор $\boldsymbol{Q}$ записывается в виде

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \quad \|\boldsymbol{n}\| = 1.$$

Линейный оператор $\boldsymbol{Q}$ указанного вида будем называть ***отражением***.

Покажем, что для любых ненулевых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $\mathbb{R}^n$ найдется такое отражение $\boldsymbol{O}$, что $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}$ преобразуется в вектор, коллинеарный $\boldsymbol{y}$. Из определения отражения следует, что $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = -2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$. Значит, искомое отражение должно определяться *единичным вектором* $\boldsymbol{n}$, коллинеарным вектору $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$. Отметим, что в этом случае число α определено с точностью до знака, так как $\|\alpha\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{O}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ и, значит, $|\alpha| = \|\boldsymbol{x}\| / \|\boldsymbol{y}\|$. Выбор знака — это выбор одного из двух возможных решений (рис. 11.2).

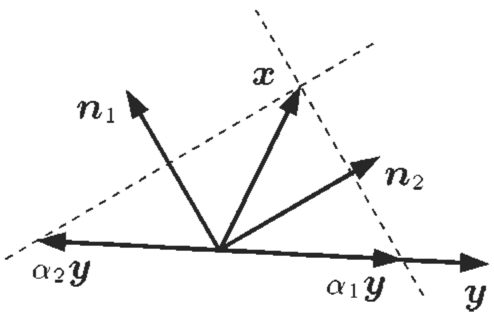


Рис. 11.2

Итак, выбираем $\alpha = \|x\| / \|y\|$ и вычисляем вектор $x_0 = \alpha y - x$. Если этот вектор нулевой, то векторы x и y коллинеарны (любой из них принадлежит линейной оболочке другого), и в качестве отражения следует взять *тождественный оператор*. Если же $x_0 \neq 0$, то отражение O задается единичным вектором $n = x_0 / \|x_0\|$. Действительно,

$$\|\alpha y - x\|^2 - (\alpha y - x, \alpha y - x) - \\ = \alpha^2 \|y\|^2 - 2\alpha(x, y) + \|x\|^2 = 2\big(\|x\|^2 - \alpha(x, y)\big).$$

Поэтому

$$Ox = x - 2(x, n)n = x - 2\frac{(x, \alpha y - x)}{\|\alpha y - x\|^2}(\alpha y - x) = \\ = x + \frac{\alpha(x, y) - \|x\|^2}{\alpha(x, y) - \|x\|^2}\big(\alpha y - x\big) = x + \big(\alpha y - x\big) = \alpha y.$$

Столбцы матрицы A будем трактовать как столбцы координат некоторых векторов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим ортогональное преобразование P_1, которое вектор a_1 переводит в вектор $a_1^1 = \alpha_1 e_1$. Если вектор a_1 ненулевой, это преобразование строится описанным выше способом, а если вектор a_1 нулевой, то в качестве P_1 можно взять тождественный оператор.

Оператор P_1 преобразует векторы $a_2, \ldots, a_2$ в некоторые векторы $a_2^1, \ldots, a_n^1$. Рассмотрим оператор P_2, который преобразует вектор $a_2^1 = \begin{pmatrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 & \ldots & a_{n2}^1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ в некоторый вектор $Pa_2^1 = a_2^2 = \begin{pmatrix} a_{12}^2 & a_{22}^2 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Для этого в качестве вектора y

можно взять любую *линейную комбинацию* базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Некоторая свобода выбора оператора $\boldsymbol{P}_2$ позволяет при этом добиться того, чтобы вектор $\boldsymbol{e}_1$, а значит и $\boldsymbol{a}_1^1$, не изменялся. Действительно, все векторы, попадающие в ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$, остаются без изменений, и нам достаточно потребовать, чтобы вектор $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{a}_2^1 - \boldsymbol{a}_2^1 = \alpha\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}_2^1$, задающий отражение $\boldsymbol{P}_2$, был ортогонален вектору $\boldsymbol{e}_1$. Это и будет означать, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ попадает в линейное подпространство $\mathcal{H}^\perp$, которое состоит из всех векторов, ортогональных $\boldsymbol{x}_0$. Указанное условие будет выполняться, если оператор $\boldsymbol{P}_2$ переводит вектор $\boldsymbol{a}_2^1 - a_{12}^1\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}0 & a_{22}^1 & \ldots & a_{n2}^1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ в вектор $\alpha_2\boldsymbol{e}_2$, так как этот оператор определяется вектором $\boldsymbol{x}_0 = \alpha_2\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{a}_2^1 - a_{12}^1\boldsymbol{e}_1)$, имеющим нулевую первую координату и потому ортогональным $\boldsymbol{e}_1$. Итак, оператор $\boldsymbol{P}_2$ не изменяет вектор $\boldsymbol{a}_1^1$, преобразует вектор $\boldsymbol{a}_2^1$ в вектор $\boldsymbol{a}_2^2 = \begin{pmatrix}a_{12}^2 & a_{22}^2 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а векторы $\boldsymbol{a}_j^1$, $j = \overline{3, n}$, в некоторые векторы $\boldsymbol{a}_j^2$.

Продолжая процесс, мы на k-м шаге строим преобразование, которое не меняет базисные векторы $\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, k-1}$, но преобразует вектор $\boldsymbol{a}_k^{k-1} - a_{1k}^{k-1}\boldsymbol{e}_1 - \ldots - a_{k-1,k}^{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1}$ в некоторый вектор, коллинеарный $\boldsymbol{e}_k$. Если k-й столбец исходной матрицы оказался нулевым, то и вектор $\boldsymbol{a}_k$ будет нулевым и в процессе преобразований $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_{k-1}$ он останется нулевым. В этом случае в качестве очередного оператора $\boldsymbol{P}_k$ можно взять тождественный оператор.

Процесс ортогонализации. К QR-разложению непосредственное отношение имеет *процесс ортогонализации Грама — Шмидта.* Любую квадратную невырожденную матрицу A порядка n можно рассматривать как совокупность столбцов, представляющих собой координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ в некотором фиксированном базисе n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}$.

Так как матрица A невырождена, ее столбцы линейно независимы, поэтому векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ образуют в $\mathcal{E}$ базис, вообще говоря, неортонормированный. Процесс ортогонализации приводит к новому, уже ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Характерной особенностью процесса ортогонализации является то, что матрица перехода из нового базиса $\boldsymbol{e}$ к старому $\boldsymbol{b}$ является верхней треугольной. Действительно, из соотношений (3.9) следует, что

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}_1 = \|\boldsymbol{g}_1\|\,\boldsymbol{e}_1,\\
&\boldsymbol{f}_2 = (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \|\boldsymbol{g}_2\|\,\boldsymbol{e}_2,\\
&\boldsymbol{f}_3 = (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2 + \|\boldsymbol{g}_3\|\,\boldsymbol{e}_3,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{f}_n = (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\,\boldsymbol{e}_{n-1} + \|\boldsymbol{g}_n\|\,\boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}$$

а матрица перехода из нового базиса $\boldsymbol{e}$ в старый $\boldsymbol{f}$ имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{g}_1\| & (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_1) \\ 0 & \|\boldsymbol{g}_2\| & \ldots & (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \|\boldsymbol{g}_n\| \end{pmatrix}.$$

Записав координаты векторов $\boldsymbol{e}_j$ в фиксированном базисе евклидова пространства, получим ортогональную матрицу Q. Исходная матрица A и ортогональная матрица Q связаны между собой соотношениями $A = QR$, т.е. мы получили QR-разложение матрицы A.

Еще раз отметим, что процесс ортогонализации Грама — Шмидта может использоваться для получения QR-разложения, если матрица является невырожденной. Кроме того, оказывается, что такой метод уступает методу вращений и методу отражений с точки зрения точности вычислений.

Единственность QR-разложения. Несложно привести пример, показывающий, что QR-разложение данной матрицы не является однозначным. Действительно, представление $E = EE$ единичной матрицы можно рассматривать в качестве ее QR-разложения, так как единичная матрица является одновременно ортогональной и верхней треугольной. Но и представление $E = (-E)(-E)$ также является QR-разложением единичной матрицы.

Природу неоднозначности, которую иллюстрирует приведенный пример, раскрывает следующее рассуждение. Пусть P — квадратная матрица, которая одновременно является и ортогональной, и верхней треугольной. Тогда P является невырожденной матрицей, а P^{-1} — ортогональной и верхней треугольной. Поэтому для любого QR-разложения матрицы A имеем $A = QR = QPP^{-1}R = (QP)(P^{-1}R) = Q'R'$, т.е. еще одно QR-разложение матрицы A (при $P \neq E$). Возникает вопрос, какие матрицы являются одновременно ортогональными и верхними треугольными?

Пусть P — ортогональная верхняя треугольная матрица. Тогда, с одной стороны, $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ является нижней треугольной, а с другой стороны P^{-1}, будучи обратной к верхней треугольной матрице, является верхней треугольной. Одновременно оба условия выполняются, если матрица P^{-1} является диагональной. Тогда и P — диагональная матрица. Кроме того, так как $PP = PP^{\mathrm{T}} = PP^{-1} = E$, то диагональные элементы P могут иметь лишь два значения 1 и -1.

Используя подходящую диагональную матрицу, у которой на диагонали расположены числа 1 и -1, мы можем любое QR-разложение $A = QR$ матрицы A видоизменить так, чтобы в верхней треугольной матрице R на диагонали стояли неотрицательные элементы. Действительно, надо рассмотреть матрицу $P = \mathrm{diag}\,(p_1,\, \ldots,\, p_n)$, в которой $p_i = 1$, если i-й диагональный элемент матрицы R является неотрицательным, и $p_i = -1$ в противоположном случае. Тогда $A = QR = QP^2R = (QP)(PR) = Q'R'$ и диагональные элементы матрицы R' все неотрицательны.

Теорема 11.2. Если матрица A невырождена, то ее QR-разложение, в котором диагональные элементы R неотрицательны, определено однозначно.

◀ Отметим, что наличие нулевых диагональных элементов у матрицы R означает, что матрица A вырожденная, а для невырожденной матрицы матрица R в ее QR-разложении не имеет нулевых диагональных элементов.

Пусть $A = QR = Q'R'$. Так как A невырожденная, то матрица R имеет обратную матрицу. Напомним, что Q ортогональна: $Q^{\mathrm{T}}Q = E$. Поэтому равенство $QR = Q'R'$ равносильно следующему: $E = (Q^{\mathrm{T}}Q')(R'R^{-1}) = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, т.е. мы получили QR-разложение единичной матрицы. По предположению, диагональные элементы матриц R и R' положительны. Поэтому и верхняя треугольная матрица $\widetilde{R}$ имеет положительные диагональные элементы. Таким образом, нам достаточно доказать, что определено однозначно QR-разложение единичной матрицы, т.е. $\widetilde{Q} = \widetilde{R} = E$.

Из равенства $\widetilde{Q}\widetilde{R} = E$ следует, что $\widetilde{R} = \widetilde{Q}^{-1} = \widetilde{Q}^{\mathrm{T}}$, т.е. верхняя треугольная матрица $\widetilde{R}$ является одновременно ортогональной. Поэтому она диагональная (см. выше), а ее диагональные элементы равны ± 1. Учитывая, что все диагональные элементы $\widetilde{R}$ положительные, заключаем, что $\widetilde{R} = E$. Но тогда и $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} = \widetilde{R} = E$. ▶

Сингулярное разложение. Рассмотрим произвольный оператор $\boldsymbol{A}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Оператор $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}^*$ — оператор, сопряженный к $\boldsymbol{A}$) является самосопряженным, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$,

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

Согласно теореме 6.6, в $\mathcal{E}$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения этого оператора, соответствующие векторам $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, т.е. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Отметим, что все собственные значения λ_i неотрицательны, так как

$$\lambda_i = \lambda_i (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = (\boldsymbol{b}_i, \lambda_i \boldsymbol{b}_i) = \\ = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i) = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i|^2 \geqslant 0. \quad (11.4)$$

Будем считать, что векторы в базисе $\boldsymbol{b}$ упорядочены таким образом, что последовательность собственных значений не возрастает. Если среди собственных значений линейного оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ k ненулевых, то $\lambda_1 \geqslant \ldots \lambda_k > 0$ и $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Положительные числа $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = \overline{1, k}$, квадраты которых являются собственными значениями линейного оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, называют ***сингулярными числами линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$, а базис $\boldsymbol{b}$ из собственных векторов $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ — ***сингулярным базисом*** оператора $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим систему векторов $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$, $i = \overline{1, k}$. Эта система состоит из ненулевых попарно ортогональных векторов, так как, согласно (11.4),

$$\|\boldsymbol{c}_i\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i\|^2 = \lambda_i > 0,$$

$$(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{b}_i, \lambda_j \boldsymbol{b}_j) = 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k.$$

Видим, что нормы векторов $\boldsymbol{c}_i$ равны соответствующим сингулярным числам μ_i линейного оператора $\boldsymbol{A}$. Положим $\boldsymbol{e}_i = \mu_i^{-1}\boldsymbol{c}_i$, $i = \overline{1, k}$, и дополним систему векторов $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_k$ векторами $\boldsymbol{e}_{k+1}$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ до ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Пусть $\boldsymbol{Q}$ — линейный оператор, который каждому вектору $\boldsymbol{b}_i$ сопоставляет вектор $\boldsymbol{e}_i$, т.е. $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, n}$. Этот линейный оператор определен однозначно, потому что заданы образы всех векторов базиса $\boldsymbol{b}$. Так как он переводит ортонормированный базис $\boldsymbol{b}$ в ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$, то является ортогональным (см. теорему 7.3). Рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}$. Если $i = \overline{1, k}$, то

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{c}_i = \mu_i \boldsymbol{e}_i,$$

а если $i = \overline{k{+}1, n}$, то

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_i.$$

Таким образом, базис $\boldsymbol{e}$ является ортонормированным базисом собственных векторов оператора $\boldsymbol{S}$. Значит, этот оператор самосопряженный, так как его матрица в базисе $\boldsymbol{e}$ является диагональной (см. теоремы 5.6 и 6.2) и имеет вид $D = \mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_k, 0, \ldots, 0)$. Обратим внимание, что ненулевые элементы матрицы D — это сингулярные числа линейного оператора A.

Из приведенного рассуждения вытекает, что любой линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в евклидовом пространстве может быть представлен в виде $\boldsymbol{SQ}$, где $\boldsymbol{S}$ — самосопряженный линейный оператор с неотрицательными собственными значениями, а $\boldsymbol{Q}$ — ортогональный линейный оператор. Выясним, что это означает для матриц.

Любая матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Представление $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{SQ}$ этого линейного оператора означает, что для матрицы A имеет место мультипликативное разложение $A = SQ$, где матрица S симметрическая с неотрицательными собственными значениями, а матрица Q ортогональная. Такое представление называют ***полярным разложением*** матрицы A.

Пусть $A = SQ$ — полярное разложение матрицы A. Так как матрица S является симметрической и имеет неотрицательные собственные значения, существует такая ортогональная матрица P и такая диагональная матрица D с неотрицательными диагональными элементами, что $S = P^{\mathrm{T}}DP$ (см. теорему 7.7). В результате получаем мультипликативное разложение $A = P^{\mathrm{T}}D(PQ) = \tilde{P}D\tilde{Q}$, где $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ — ортогональные матрицы. Это представление не является единственным: несложно заметить, что есть и другие разложения, отличающиеся от указанного порядком диагональных элементов в матрице D.

Пусть $A = PDQ$, где P, Q — ортогональные матрицы, а диагональные элементы матрицы D неотрицательны. Тогда

$$A^{\mathrm{T}}A = (PDQ)^{\mathrm{T}}(PDQ) = Q^{\mathrm{T}}DP^{\mathrm{T}}PDQ = Q^{\mathrm{T}}D^2Q.$$

Полученное равенство означает, что $A^{\mathrm{T}}A$ и D^2 представляют собой матрицы одного и того же линейного оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, записанные в двух различных ортонормированных базисах, причем матрица Q — это матрица перехода из базиса, соответствующего матрице D^2 линейного оператора, в другой базис, в котором матрицей оператора является $A^{\mathrm{T}}A$. Матрицей обратного перехода, при котором матрица $A^{\mathrm{T}}A$ самосопряженного линейного оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ преобразуется к диагональному виду D^2, т.е. перехода к базису из собственных векторов $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, является матрица $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$. Диагональные элементы матрицы D^2 представляют собой собственные значения оператора $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, или, что то же самое, собственные значения матрицы $A^{\mathrm{T}}A$. Количество ненулевых диагональных элементов матрицы D равно рангу матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ и совпадает с рангом матрицы A. Действительно, если $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ — базис, в котором линейный оператор $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ имеет матрицу D^2, то, согласно сказанному выше, векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$ попарно ортогональны, а поэтому количество ненулевых среди них равно рангу линейного оператора $\boldsymbol{A}$. Но это количество равно количеству ненулевых диагональных элементов матрицы D^2. Отметим, что ненулевые диагональные элементы матрицы D представляют собой сингулярные числа оператора $\boldsymbol{A}$.

Мультипликативное разложение $A = PDQ$, где P и Q — ортогональные матрицы, $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$, называют ***сингулярным разложением*** матрицы A, а диагональные элементы $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — ***сингулярными числами матрицы*** A. Можно показать, что указанное разложение определено однозначно, если матрица A невырождена.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая последовательность построения сингулярного разложения для невырожденной матрицы:

а) находим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и ортонормированный базис из собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}A$, располагая собственные значения в порядке убывания;

б) строим матрицу $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, где $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = \overline{1, n}$;

в) составляем матрицу $Q^{\text{т}}$, записывая в нее по столбцам координаты найденных собственных векторов матрицы $A^{\text{т}}A$ и определяем обратную матрицу $Q^{-1} = Q^{\text{т}}$;

г) находим вторую ортогональную матрицу P по формуле $P = AQ^{\text{т}}D^{-1}$.

11.3. Описание итерационных методов

Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) состоят в построении последовательности столбцов x^1, x^2, ..., x^N, ... Каждый очередной столбец x^{N+1} вычисляется на основе одного или нескольких предыдущих столбцов. Если в итерационном методе столбец x^{N+1} вычисляется с использованием одного предшествующего столбца x^N, то такой метод называют ***одношаговым***, в ***двухшаговых итерационных методах*** текущий столбец вычисляется с использованием двух предшествующих столбцов. В общем случае, если для вычисления x^{N+1} используют столбцы x^N, x^{N-1}, ..., x^{N-k+1} (всего k столбцов), то говорят о ***k-шаговом итерационном методе.*** Наиболее употребительны одно- и двухшаговые методы.

Общее представление об одношаговых методах дает *метод простой итерации* решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$, в котором $f(x)$ — произвольная функция одного действительного переменного [II]. Для применения этого метода нужно уравнение преобразовать к виду $x = \varphi(x)$. Отправляясь от некоторого начального приближения x_0, строят *итерационную последовательность* $\{x_n\}$ согласно формуле $x_{N+1} = \varphi(x_N)$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ Если эта последовательность сходится к некоторому значению x_*, т.е. $|x_N - x_*| \to 0$ при $N \to \infty$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_*, то, переходя в равенстве $x_{N+1} = \varphi(x_N)$ к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что $x_* = \varphi(x_*)$ и значение x_* является искомым решением уравнения $f(x) = 0$. В качестве приближения точного решения x_* берут одно из значений x_N, достаточно близкое к x_*.

Аналогично можно поступить и в случае решения СЛАУ $Ax = b$ с невырожденной матрицей A. Преобразовав СЛАУ в эквивалентную ей систему вида $x = \Phi(x) = Bx + c$, мы можем построить итерационную последовательность $x^{N+1} = \Phi(x^N)$, $N = 0, 1, \ldots$, начав с некоторого начального столбца x^0 (индексы в нашем случае удобнее ставить вверху, а не внизу, оставляя нижний индекс для нумерации элементов матриц и столбцов). Сходимость такой последовательности, состоящей из столбцов, или элементов пространства $\mathbb{R}^n$, следует рассматривать относительно некоторой нормы. Последовательность $\{x^N\}$ сходится к некоторому столбцу x^*, если $\|x^N - x^*\| \to 0$ при $N \to \infty$. Векторная функция $\Phi(x) = Bx + c$ непрерывна в любой точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, и мы можем перейти к пределу под знаком непрерывной функции: $x^* = Bx^* + c$. Таким образом, предел итерационной последовательности дает нам точное решение СЛАУ, а в качестве приближенного решения системы можно взять подходящий столбец итерационной последовательности.

Каноническая форма одношаговых методов. Наиболее употребительные одношаговые итерационные методы решения СЛАУ укладываются в единую схему, согласно которой итерационная последовательность $\{x^N\}$, построенная по такому методу, подчиняется уравнению общего вида

$$B_{N+1}\frac{x^{N+1} - x^N}{\tau_{N+1}} + Ax^N = b, \tag{11.5}$$

в котором $\det B_{N+1} \neq 0$, $N = 0, 1, \ldots$

Уравнение (11.5) называют ***канонической формой одношагового итерационного метода.*** Выбор невырожденных матриц B_{N+1} характеризует конкретный метод, ***итерационный параметр*** τ_{N+1} не является обязательным (его можно было бы учесть в матрице B_{N+1}) и вводится в уравнение из соображений удобства. Его используют для поиска путей усиления конкретного метода с точки зрения сходимости итерационной последовательности и скорости этой сходимости.

В канонической форме одношагового итерационного метода изменение $x^{N+1} - x^N$ текущего столбца фактически связывается с *невязкой* $b - Ax^N$, которую дает этот столбец в рассматриваемой СЛАУ. Чем меньше невязка, тем меньше изменение текущего столбца. Матрица B_{N+1}, реализующая эту связь на N-м шаге, должна быть достаточно простой, так как, согласно канонической форме метода, для получения изменения $x^{N+1} - x^N$ требуется вычисление обратной матрицы для B_{N+1}. Если это не так, то более простым может быть обращение матрицы A, и тогда прямой метод решения СЛАУ окажется более предпочтительным.

Если в канонической форме (11.5) одношагового итерационного метода матрица B_{N+1} является единичной, то итерационный метод называют ***явным***, а иначе — ***неявным***. Если матрицы B_{N+1} и итерационный параметр τ_{N+1} от номера итерации не зависят: $B_{N+1} = B$, $\tau_{N+1} = \tau$, то метод называют ***стационарным***.

Методы Якоби и Зейделя. Представим невырожденную матрицу A в виде суммы трех матриц

$$A = A_- + D + A_+, \tag{11.6}$$

где D — диагональная матрица; A_- и A_+ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми элементами на диагонали. Такое представление существует и единственно, так как в каждой позиции только одна из складываемых матриц имеет ненулевой элемент, равный соответствующему элементу матрицы A. Матрица A_- содержит элементы A, расположенные под главной диагональю, матрица A_+ — элементы над главной диагональю, а матрица D — диагональные.

Пример 11.1. Для квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & -7 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

четвертого порядка в представлении (11.6) имеем

$$A_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \#$$

В СЛАУ $Ax = b$ вместо матрицы A подставим ее представление (11.6). Получим $(A_- + D + A_+)x = b$, откуда

$$Dx = -(A_- + A_+)x + b. \tag{11.7}$$

Если диагональные элементы матрицы $A = (a_{ij})$ не равны нулю, то диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(a_{11},\, a_{22},\, \ldots,\, a_{nn})$ имеет обратную матрицу $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{11}^{-1},\, a_{22}^{-1},\, \ldots,\, a_{nn}^{-1}\right)$. В этом случае систему (11.7) можно записать в виде

$$x = -D^{-1}(A_- + A_+)x + D^{-1}b. \tag{11.8}$$

Систему (11.8) можно использовать для построения итерационной последовательности

$$x^{N+1} = -D^{-1}(A_- + A_+)x^N + D^{-1}b, \quad N = 0, 1, \ldots, \tag{11.9}$$

где x^0 — произвольное начальное приближение. Вычисление решения СЛАУ при помощи указанной последовательности называют ***методом Якоби.*** Матричные соотношения (11.9) несложно записать в координатной форме. Обозначая номера строк и столбцов индексами внизу, получим

$$x_i^{N+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^N - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^N + b_i\Big), \quad i = \overline{1, n}. \tag{11.10}$$

Здесь и далее мы условимся считать равными нулю суммы, у которых верхний предел суммирования меньше нижнего.

Используя представление (11.6) матрицы A, запишем СЛАУ $Ax = b$ в следующем виде:

$$(D + A_-)x = -A_+x + b. \tag{11.11}$$

Если диагональные элементы матрицы A не равны нулю, то нижняя треугольная матрица $D + A_-$ имеет обратную матрицу $(D + A_-)^{-1}$ и систему (11.11) эквивалентна следующей:

$$x = (D + A_-)^{-1}(-A_+x + b). \tag{11.12}$$

Соотношение (11.12) можно использовать для построения итерационной последовательности

$$x^{N+1} = (D + A_-)^{-1}(-A_+x^N + b), \tag{11.13}$$

использование которой для решения СЛАУ $Ax = b$ называют ***методом Зейделя.***

Для вычисления итерационной последовательности в методе Зейделя требуется обращение нижней треугольной матрицы $D + A_-$, но оказывается, что такое обращение является формальным. Преобразуем соотношение (11.13):

$$Dx^{N+1} = -A_-x^{N+1} - A_+x^N + b.$$

Исходя из этой формы уравнения, получаем

$$x_i^{N+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{N+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^N + b_i\Big), \quad i = \overline{1, n}. \tag{11.14}$$

В уравнениях (11.14) элементы x_i^{N+1} столбца x^{N+1} находятся и в левой, и в правой части. Однако если их вычислять последовательно для $i = 1$, $i = 2$, ..., $i = n$, мы увидим, что в формуле для очередного элемента x_i^{N+1} используются только уже найденные элементы x_1^{N+1}, ..., x_{i-1}^{N+1}. Обращение матрицы $D + A_-$ естественным образом встроено в вычислительную схему и не требует отдельных усилий.

Вычислительные схемы методов Зейделя и Якоби, которые описываются уравнениями (11.10) и (11.14), очень похожи. Различие лишь в том, что при вычислении каждого элемента столбца x^{N+1} в методе Якоби используются только элементы предыдущего столбца x^N, а в методе Зейделя более новые уже найденные элементы текущего столбца.

И метод Якоби, и метод Зейделя могут быть получены в рамках канонической формы (11.5) одношаговых итерационных методов. Итерационная последовательность метода Якоби подчиняется уравнению $Dx^{N+1} = -(A_- + A_+)x^N + b$, которое эквивалентно (11.9). Это уравнение легко преобразуется в форму $Dx^{N+1} = -(A - D)x^N + b$, откуда получаем

$$D(x^{N+1} - x^N) + Ax^N = b.$$

Видим, что для получения метода Якоби в канонической форме надо положить $B_{N+1} = D$, $\tau_{N+1} = 1$. Таким образом, метод Якоби можно квалифицировать как одношаговый неявный стационарный итерационный метод.

Из уравнения (11.13) находим $(D + A_-)x^{N+1} = -A_+x^N + b$, или, заменяя матрицу A_+ через матрицу A, $(D + A_-)x^{N+1} = -(A - D - A_-)x^N + b$. Следовательно,

$$(D + A_-)(x^{N+1} - x^N) + Ax^N = b. \tag{11.15}$$

Для представления метода Зейделя в канонической форме мы должны положить $B_{N+1} = D + A_-$, $\tau_{N+1} = 1$, $N = 0, 1, \ldots$ Таким образом, метод Зейделя также относится к одношаговым стационарным неявным методам.

Другие итерационные методы. Полагая в канонической форме итерационных методов $B_{N+1} = E$, $\tau_{N+1} = \tau$, $N = 0, 1, \ldots$, получаем уравнение

$$\frac{x^{N+1} - x^N}{\tau} + Ax^N = b, \tag{11.16}$$

дающее ***метод простой итерации***, представляющий собой явный стационарный метод. Обобщением метода простой итерации является ***метод Ричардсона***, для которого в канонической форме (11.5) итерационных методов следует положить $B_{N+1} = E$. В результате получим

$$\frac{x^{N+1} - x^N}{\tau_{N+1}} + Ax^N = b. \tag{11.17}$$

В уравнение (11.15) метода Зейделя введем числовой параметр ω:

$$(D + \omega A_-)\frac{x^{N+1} - x^N}{\omega} + Ax^N = b. \tag{11.18}$$

Это приведет к серии методов, среди которых находится и метод Зейделя, соответствующий частному случаю $\omega = 1$. Скорость сходимости итерационной последовательности зависит от параметра ω, подбирая который можно получить метод, более точный по сравнению с методом Зейделя. Уравнение (11.18) задает ***метод верхней релаксации***. К нему близок ***метод нижней релаксации***, который имеет уравнение

$$(D + \omega A_+)\frac{x^{N+1} - x^N}{\omega} + Ax^N = b. \tag{11.19}$$

Как и метод Зейделя, методы верхней и нижней релаксации связаны с обращением матрицы, которое естественно встроено в вычислительную схему метода. В случае метода верхней релаксации преобразуем уравнение (11.18) к виду

$$x^{N+1} = -\omega D^{-1}A_-x^{N+1} + \big((1-\omega)E - \omega D^{-1}A_+\big)x^N + \omega D^{-1}b.$$

Записывая это уравнение в координатах, находим

$$x_i^{N+1} = \frac{\omega}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{N+1} + \\ + a_{ij}(1/\omega - 1)x_i^N - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^N + b_i\Big), \quad i = \overline{1,n}. \quad (11.20)$$

В методе нижней релаксации приведем уравнение (11.19) канонической формы к виду

$$x^{N+1} = -\omega D^{-1}A_+x^{N+1} + \big((1-\omega)E - \omega D^{-1}A_-\big)x^N + \omega D^{-1}b$$

и запишем в координатной форме:

$$x_i^{N+1} = \frac{\omega}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{N} + a_{ij}(1/\omega - 1)x_i^N - \\ - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{N+1} + b_i\Big), \quad i = \overline{1,n}. \quad (11.21)$$

Из (11.20) и (11.21) следует, что методы верхней и нижней релаксации различаются порядком вычислений. В методе верхней релаксации элементы столбца x^{N+1} вычисляются последовательно от первого к последнему (как в методе Зейделя), а в методе нижней релаксации, наоборот, — от последнего к первому.

11.4. Сходимость итерационных методов

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) наиболее детально разработаны в случае, когда *матрица* системы симметрическая *положительно определенная*. Это объясняется тем, что такие системы часто встречаются в приложениях, причем они имеют значительные размеры, и прямые методы для таких систем теряют эффективность.

Отметим, что квадратную СЛАУ с невырожденной матрицей A легко преобразовать в эквивалентную систему с симметрической положительно определенной матрицей. Для этого достаточно умножить систему $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ слева на матрицу A^{T}. Поскольку $\det A^{\mathrm{T}} = \det A \neq 0$, то получающаяся при этом СЛАУ $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ эквивалентна исходной СЛАУ, так как можно провести обратное преобразование, умножив полученную систему слева на матрицу $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$. Матрица $A^{\mathrm{T}}A$ является симметрической:

$$(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A.$$

Покажем, что она является и положительно определенной. Для этого рассмотрим *квадратичную форму* $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax$. В силу свойств умножения матриц имеем

$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0,$$

где $\|\cdot\|$ — *евклидова норма* в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ со *стандартным скалярным умножением*. Последнее нестрогое неравенство превращается в равенство, если только столбец Ax является нулевым. Так как матрица A невырождена, существует обратная матрица A^{-1}. Поэтому при $Ax = 0$ имеем $x = Ex = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$.

Переход от данной СЛАУ к эквивалентной ей системе с симметрической положительно определенной матрицей не всегда целесообразен. При таком переходе могут утрачиваться свойства, которые были бы полезны при решении системы и которые не компенсируются приобретенными свойствами (симметричностью и положительной определенностью). Например, это наблюдается для разреженных матриц, отличительной особенностью которых является большое количество нулевых элементов. К недостаткам указанного перехода следует отнести и то, что он, как правило, приводит к увеличению числа обусловленности матрицы системы.

Основой любого итерационного метода является сходимость итерационной последовательности по той или иной норме, заданной в линейном пространстве. Мы рассмотрим линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, норма в котором порождается стандартным скалярным умножением. Элементы линейного арифметического пространства будем записывать в виде столбцов.

Если матрица A симметрическая, то запись $A > 0$ означает, что эта матрица положительно определена. Другими словами, положительно определенной является квадратичная форма $x^{\mathrm{T}}Ax$, матрицей которой является A. Для произвольной матрицы B мы также можем рассмотреть квадратичную форму $x^{\mathrm{T}}Bx$. Матрицей этой квадратичной формы является $B^s = (B + B^{\mathrm{T}})/2$. Если указанная квадратичная форма положительно определена, то мы будем говорить, что и матрица B (вообще говоря, несимметрическая) положительно определена и обозначать это так: $B > 0$.

Рассмотрим одношаговый итерационный метод в канонической форме (11.5). Если метод *стационарный*, то он определяется частным случаем канонической формы

$$B\frac{x^{N+1} - x^N}{\tau} + Ax^N = b, \quad \det B \neq 0. \qquad (11.22)$$

Для такого метода верна следующая теорема о сходимости.

Теорема 11.3 (теорема А.А. Самарского). Если A — симметрическая положительно определенная матрица, $\tau > 0$ и матрица B удовлетворяет условию $B - 0{,}5\tau A > 0$, то итерационная последовательность для итерационного метода (11.22) сходится. #

Сформулированная теорема 11.3 позволяет получить легко проверяемые условия сходимости для конкретных итерационных методов.

Следствие 11.1. Пусть A — симметрическая положительно определенная матрица порядка n с диагональным преобладанием, т.е. для ее элементов a_{ij} выполняются неравенства

$$a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.23}$$

Тогда итерационная последовательность *метода Якоби* сходится.

◀ Метод Якоби является частным случаем канонической формы (11.22) стационарного итерационного метода при $\tau = 1$, $B = D$. Поэтому условие теоремы 11.3 для этого метода имеет вид $2D - A > 0$. Покажем, что это условие выполняется, если матрица A имеет диагональное преобладание.

Оценим квадратичную форму $x^{\mathrm{T}}Ax$, учитывая, что $a_{ji} = a_{ij}$ для симметрической матрицы A:

$$x^{\mathrm{T}}Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_i|\,|x_j| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|(x_i^2 + x_j^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|x_j^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ji}|x_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}| + |a_{ji}|)x_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|x_i^2.$$

Из (11.23) немедленно следует, что у матрицы A с диагональным преобладанием диагональные элементы a_{ii} положительны. Поэтому при $x \neq 0$

$$x^{\mathrm{T}}Ax = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigl(\sum_{j\neq i} |a_{ij}| + a_{ii}\Bigr) < 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_{ii} = 2x^{\mathrm{T}}Dx.$$

Следовательно, $x^{\mathrm{T}}(2D - A)x > 0$ при $x \neq 0$ и условия теоремы А.А. Самарского выполнены. ▶

Следствие 11.2. Если A — симметрическая положительно определенная матрица, то итерационная последовательность *метода верхней релаксации* сходится при $0 < \omega < 2$.

◀ Метод верхней релаксации получается из канонической формы (11.22) стационарного метода при $B = D + \omega A_-$, $\tau = \omega$. Для симметрической матрицы A имеем $A_-^{\text{т}} = A_+$. Значит, квадратичные формы $x^{\text{т}} A_- x$ и $x^{\text{т}} A_+ x$ совпадают, так как у них одна и та же матрица $0{,}5(A_- + A_+)$. Учитывая это, преобразуем условие теоремы 11.3:

$$x^{\text{т}}\bigl(B - 0{,}5\tau A\bigr)x = x^{\text{т}}\bigl((D+\omega A_-) - 0{,}5\omega(D+A_-+A_+)\bigr)x =$$
$$= (1-0{,}5\omega)x^{\text{т}}Dx + 0{,}5\omega\bigl(x^{\text{т}}A_-x - x^{\text{т}}A_+x\bigr) = (1-0{,}5\omega)x^{\text{т}}Dx.$$

У симметрической положительно определенной матрицы все диагональные элементы положительны (см. следствие 8.3). Это значит, что диагональная матрица D положительно определена. Следовательно,

$$x^{\text{т}}\bigl(B - 0{,}5\tau A\bigr)x = (1 - 0{,}5\omega)x^{\text{т}}Dx > 0$$

при $\omega < 2$ и $x \neq 0$. Если $\omega > 0$, то и $\tau > 0$. Согласно теореме 11.3, при $0 < \omega < 2$ итерационная последовательность метода верхней релаксации сходится. ▶

При $\omega = 1$ метод верхней релаксации превращается в *метод Зейделя*. Из следствия 11.2 сразу получаем следующее утверждение.

Следствие 11.3. Если A — симметрическая положительно определенная матрица, то итерационная последовательность метода Зейделя сходится.

Для метода простой итерации теорема 11.3 дает условие сходимости, более сложное для проверки.

Следствие 11.4. Если A — симметрическая положительно определенная матрица, то итерационная последовательность метода простой итерации сходится при

$$0 < \tau < 2/\lambda_{\max}, \tag{11.24}$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее *собственное значение матрицы* A.

◀ Метод простой итерации (11.16) получается из канонической формы (11.22) стационарного метода в случае $B = E$. Условие теоремы 11.3 для этого метода имеет вид $E - 0{,}5\tau A > 0$, $\tau > 0$. Матрица $E - 0{,}5\tau A$ симметрическая. Поэтому она положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все ее собственные значения (см. **8.6**).

Покажем, что каждому собственному значению μ матрицы $E - 0{,}5\tau A$ соответствует собственное значение $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{\tau}$ матрицы A. Пусть x — собственный вектор матрицы $E - 0{,}5\tau A$, отвечающий собственному значению μ, т.е. $(E - 0{,}5\tau A)x = \mu x$. Тогда $x - 0{,}5\tau Ax = \mu x$, откуда $Ax = 2\dfrac{1-\mu}{\tau}x$. Следовательно, x — собственный вектор матрицы A, при этом собственное значение равно $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{\tau}$. Выразив отсюда μ, находим $\mu = 1 - 0{,}5\tau\lambda$.

Собственное значение μ матрицы $E - 0{,}5\tau A$ положительно, если для соответствующего ему собственного значения λ матрицы A выполняется неравенство $1 - 0{,}5\tau\lambda > 0$, или $\lambda < 2/\tau$. Отсюда вытекает, что если максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы A меньше $2/\tau$, то все собственные значения матрицы $E - 0{,}5\tau A$ положительны и эта матрица является положительно определенной. Согласно теореме 11.3, итерационная последовательность метода простой итерации сходится, если $\lambda_{\max} < 2/\tau$. ▶

Условия сходимости типа (11.24) можно получить для произвольного стационарного метода.

Теорема 11.4. Для сходимости итерационной последовательности стационарного метода, заданного канонической формой (11.22), при любом начальном приближении необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения матрицы $T = E - \tau B^{-1}A$ были по модулю меньше единицы. #

Отметим, что в теореме не требуется, чтобы матрица A СЛАУ была симметрической. Достаточно лишь, чтобы и A, и B были невырожденными матрицами. В этом случае *характеристическое уравнение матрицы* T может иметь как действительные корни (собственные значения), так и комплексные. Для сходимости итерационной последовательности нужно, чтобы все корни, и действительные, и комплексные, по модулю были меньше единицы.

11.5. Скорость сходимости стационарных итерационных методов

Пусть x_* — точное решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$ с квадратной невырожденной матрицей A порядка n; $\{x^N\}$ — *итерационная последовательность стационарного итерационного метода* (11.22). Разность $v^N = x^N - x_*$ называют ***ошибкой*** N***-й итерации***.

Подставляя в уравнение (11.22) выражения $x^N = v^N + x_*$, $x^{N+1} = v^{N+1} + x_*$ и учитывая равенство $Ax_* = b$, находим

$$B\frac{v^{N+1} - v^N}{\tau} + Av^N = 0.$$

откуда

$$v^{N+1} = Tv^N, \tag{11.25}$$

где $T = E - \tau B^{-1}A$. Соотношение (11.25) позволяет выразить ошибку N-й итерации через ошибку начального приближения:

$$v^N = T^N v^0. \tag{11.26}$$

Сходимость итерационной последовательности стационарного метода означает, что к нулю сходится последовательность $\{v^N\}$, определенная *рекуррентным соотношением* (11.25). Согласно равенству (11.26), указанная сходимость определяется сжимающими свойствами матрицы T [1-Д8.2]. Если отображение $y = Tx$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с заданной нормой является *сжимающим*, т.е. для некоторой постоянной $q < 1$ и любых $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|Tx^1 - Tx^2\| = \|T(x^1 - x^2)\| \leqslant q\,\|x^1 - x^2\|,$$

то последовательность $\{v^N\}$ сходится. Постоянная q определяется свойствами матрицы T, и от величины этой постоянной зависит, насколько быстро сходится последовательность $\{v^N\}$. Необходимое и достаточное условие сходимости к нулю последовательности ошибок дает теорема 11.4, но проверка условия теоремы достаточно сложна. Поэтому часто прибегают к другим условиям, более простым, но имеющим лишь достаточный характер. Эти условия обычно связаны с *нормой матрицы* T.

Как и выше, будем рассматривать столбцы высоты n в качестве *векторов линейного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$, в котором задана некоторая норма $\|\cdot\|$. Для матриц будем использовать *норму, индуцированную* заданной нормой в $\mathbb{R}^n$, и для индуцированной нормы используем то же обозначение, что и для нормы в $\mathbb{R}^n$. Из (11.26) следует, что

$$\|v^N\| \leqslant \|T^N\|\,\|v^0\|.$$

Отсюда видим, что последовательность $\{v^N\}$ сходится к нулю, если $\|T^N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Взяв $\varepsilon > 0$, найдем такой номер $N(\varepsilon)$, что при $N \geqslant N(\varepsilon)$ будет $\|T^N\| < \varepsilon$. Тогда для $N = N(\varepsilon)$ получаем $\|v^N\| < \varepsilon\,\|v^0\|$, т.е. за N итераций начальное приближение уменьшилось в $1/\varepsilon$ раз. Число $N(\varepsilon)$ следует выбирать наименее возможным, и тогда оно будет определять минимальное число итераций для заданной точности ε, а обратную величину $1/N(\varepsilon)$ естественно рассматривать как ***скорость сходимости итерационного метода.*** Отметим, что минимальное число интераций и скорость сходимости метода зависят от того, какая выбрана норма в линейном арифметическом пространстве.

Вычислить нормы $\|T^N\|$ очень сложно. Чтобы установить сходимость последовательности таких норм и выяснить скорость сходимости, надо использовать для таких норм различные оценки. Например, если $\|T\| = q < 1$, то, согласно неравенству $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$, верному для любой *кольцевой нормы*, имеем неравенство $\|T^N\| \leqslant \|T\|^N = q^N$, откуда сразу следует сходимость к нулю последовательности $\{\|T^N\|\}$. Более того, записав неравенства $\|T^N\| \leqslant q^N < \varepsilon$, получаем при помощи логарифмирования оценку минимального числа итераций:

$$N(\varepsilon) \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\|T\|)}.$$

Скорость сходимости итерационной последовательности в стационарном методе зависит, вообще говоря, от выбранного значения *итерационного параметра* τ. То значение τ_0 параметра, при котором скорость сходимости метода наивысшая, называют ***оптимальным итерационным параметром.*** Это значение, конечно, зависит от используемой нормы. Остановимся на случае, когда в $\mathbb{R}^n$ рассматривается *евклидова норма*, порожденная *стандартным скалярным произведением*.

Если A — симметрическая положительно определенная матрица, то для метода простой итерации (11.16)

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)},$$

где $\lambda_{\min(A)}$ и $\lambda_{\max(A)}$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы A. При этом верна следующая оценка ошибки N-й итерации: $\|v^N\| \leqslant \rho^N \|v^0\|$, где

$$\rho = \frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}.$$

Параметр ρ определяется отношением $\xi = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$, представляющим собой *число обусловленности* симметрической положительно определенной матрицы A. Чем меньше число обусловленности, тем меньше ρ и тем выше скорость сходимости метода. При плохо обусловленной матрице A параметр ρ близок к единице и скорость сходимости метода простой итерации мала. В такой ситуации целесообразно ориентироваться на неявные итерационные методы (11.22).

Для неявного итерационного метода (11.22), т.е. при $B \neq E$, в случае симметрических матриц A и B

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max}(B^{-1}A) + \lambda_{\min}(B^{-1}A)},$$

где $\lambda_{\min}(B^{-1}A)$ и $\lambda_{\max}(B^{-1}A)$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы $B^{-1}A$. Для ошибки итерации верна оценка $\|v^N\| \leqslant \rho^N \|v^0\|$, где

$$\rho = \frac{\lambda_{\max}(B^{-1}A) - \lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A) + \lambda_{\min}(B^{-1}A)}.$$

Величина ρ определяется числом обусловленности

$$\xi = \frac{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}$$

матрицы $B^{-1}A$. Невырожденную симметрическую матрицу B следует выбирать так, чтобы ξ было мало́ и во всяком случае было меньше числа обусловленности матрицы A (в противном случае использование неявного метода не имеет смысла).

Вопросы и задачи

11.1. Может ли число обусловленности квадратной невырожденной матрицы быть: а) отрицательным; б) положительным; в) целым; г) иррациональным; д) бо́льшим единицы; е) ме́ньшим единицы; ж) равным единице?

11.2. Найдите число обусловленности матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, рассматривая в качестве нормы матриц: а) спектральную норму; б) октаэдрическую норму; в) кубическую норму. Сравните полученные ответы.

11.3. Докажите, что $c(\alpha A) = c(A)$ для любого действительного числа $\alpha \neq 0$.

11.4. Приведите пример нормы матриц и матрицы, которая относительно этой нормы имеет число обусловленности, меньшее единицы.

11.5. Найдите все матрицы A, для которых $c(A) = 1$ относительно спектральной нормы матриц.

11.6. Докажите, что для октаэдрической, спектральной, кубической, евклидовой норм матриц число обусловленности не изменяется при перестановке строк и столбцов матрицы.

11.7. Как найти сингулярное разложение симметрической положительно определенной матрицы?

11.8. Найдите QR-разложение, полярное и сингулярное разложения для матриц:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 2 \\ 5 & 28 & 21 \end{pmatrix}.$$

11.9. Составьте программу на одном из алгоритмических языков, реализующую метод Зейделя. При помощи составленной программы решите систему

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 - 8{,}0x_2 + 9{,}3x_3 - 8{,}2x_4 = 1{,}5, \\ -3{,}3x_1 + 2{,}4x_2 - 2{,}8x_3 + 2{,}4x_4 = 2, \\ -2{,}6x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}2x_3 + 1{,}9x_4 = -1, \\ -1{,}3x_1 + 9{,}3x_2 - 1{,}1x_3 + 9{,}5x_4 = 0. \end{cases}$$

Сравните найденное решение с решением той же системы методом Гаусса.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с.

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. пособие для физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов. 6-е изд., стереотип. М.: Наука, 1984. 319 с.

Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ. под ред. *В.Б. Лидского*. М.: Наука, 1969. 368 с.

Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.

Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 576 с.

Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. 4-е изд., доп. М.: Наука, 1971. 272 с.

Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1979. 392 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 304 с.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 8-е изд. М.: Наука, 1965. 432 с.

Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. *С.П. Демушкина*. М.: Наука, 1978. 280 с.

Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Пер. с англ. под ред. *Г.И. Марчука*. М.: Мир, 1980. 456 с.

Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Хорн Р., Джонсон У. Матричный анализ / Пер. с англ. под ред. *Х.Д. Икрамова*. М.: Мир, 1989. 656 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова.* Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. 13-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 1995. 872 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Пер. с англ. под ред. *И.Г. Арамановича.* М.: Наука, 1973. 832 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров.* М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. 2-е изд., стереотип. Киев: Техніка, 1977. 768 с.

Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика / Пер. с франц. под ред. *А.Н. Колмогорова.* М.: Мир, 1966. 272 с.

Задачники

Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие / Под ред. *Д.В. Беклемишева.* М.: Наука, 1987. 496 с.

Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975. 320 с.

Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи / Пер. с франц. *Е.И. Стечкиной.* М.: Наука, 1973. 464 с.

Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Просвещение, 1964. 184 с.

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. 5-е изд. М.: Наука, 1974. 384 с.

Сборник задач по линейной алгебре / Под ред. *С.К. Соболева.* М.: Изд-во МГТУ, 1991. 155 с.

Сборник задач по математике для втузов: Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов. / Под ред. *А.В. Ефимова* и *Б.П. Демидовича.* 2-е изд. М.: Наука, 1986. 428 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск 4

Канатников Анатолий Николаевич
Крищенко Александр Петрович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 07.10.2015. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 21,0. Тираж 500 экз. (1-й з-д 1-100). Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5